

THÈSES DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

—
par

Gérard IOOSS

—
pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences



1^{ère} THÈSE : Contribution à la Théorie non linéaire de la Stabilité des
Ecoulements laminaires

2^{ème} THÈSE : Le Spectre d'une variété riemannienne

Soutenues le 3 Mars 1971 devant la Commission d'examen

MM. J.L. LIONS Président

J.P. GUIRAUD }
A. AVEZ } Examineurs

O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1971

THÈSES DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

par

Gérard IOOSS

pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences



1^{ère} THÈSE : Contribution à la Théorie non linéaire de la Stabilité des
Ecoulements laminaires

2^{ème} THÈSE : Le Spectre d'une variété riemannienne

Soutenues le 3 Mars 1971 devant la Commission d'examen

MM. J.L. LIONS Président

J.P. GUIRAUD }
A. AVEZ } Examineurs

O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1971



Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J.P. Guiraud qui m'a fourni un sujet de Thèse si passionnant par la diversité des domaines qu'il recouvre, qui m'a guidé en me faisant bénéficier de ses conseils judicieux, et qui a su me redonner l'impulsion nécessaire chaque fois que le besoin s'en est fait sentir.

Ma gratitude s'adresse également à Monsieur l'Ingénieur Général P. Carrière et à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, qui m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail, ainsi qu'à Monsieur le Professeur M. Roy membre de l'Académie des Sciences, pour l'intérêt qu'il a montré à la poursuite de cette étude en transmettant mes communications à l'Académie des Sciences.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.L. Lions qui a bien voulu accepter la présidence de mon jury de Thèse et qui, en tant que délégué par la commission de Mathématiques, a pu, bien que disposant de peu de temps, lire attentivement et porter un jugement sur mon travail. Je remercie aussi Monsieur le Professeur A. Avez qui a su me proposer un deuxième sujet m'introduisant à de nouveaux horizons particulièrement intéressants.

Merci enfin à ma femme qui a su i) m'aider à surmonter les découragements passagers et ii) quelquefois s'effacer devant la terrible concurrence des Mathématiques, en attendant des jours meilleurs.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554017_0031

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
I. INTRODUCTION	7
I,1. INTRODUCTION AU PROBLÈME PHYSIQUE	7
I,1.1. <i>Présentation du problème</i>	7
I,1.2. <i>Théorie de L. Landau</i>	7
I,1.3. <i>Problème non-linéaire instationnaire</i>	8
I,1.4. <i>Problème non-linéaire stationnaire</i>	8
I,2. INTRODUCTION AU PROBLÈME MATHÉMATIQUE	8
I,3. INDEX	10
I,3.1. <i>Notations utilisées</i>	10
I,3.2. <i>Index des Lemmes et Théorèmes</i>	11
I,3.3. <i>Mode d'emploi des notations</i>	11
II. PRÉLIMINAIRES	12
II,1. ESPACES FONCTIONNELS	12
II,1.1. <i>Généralités</i>	12
II,1.2. <i>Définition du domaine Ω</i>	12
II,1.3. <i>Espaces fonctionnels réguliers</i>	13
II,1.4. <i>Espaces fonctionnels hilbertiens</i>	13
II,2. OPÉRATEUR Π_0	14
II,2.1. <i>Généralités</i>	14
II,2.2. <i>Construction dans $L_2(\Omega)$</i>	14
II,2.3. <i>Construction dans $H_m(\Omega)$</i>	15
II,3. OPÉRATEUR $\mathcal{C}$	16
II,3.1. <i>Généralités</i>	16
II,3.2. <i>Résolution de (3,1) - Régularité intérieure</i>	16
II,3.3. <i>Résolution de (3,1) - Régularité globale</i>	17
II,3.4. <i>L'opérateur $\mathcal{C}$</i>	20
II,4. ÉQUATIONS CLASSIQUES	21
II,4.1. <i>Ecoulement dans une enceinte fermée</i>	21
II,4.2. <i>Problème de Couette-Taylor</i>	22
II,4.3. <i>Problème de Bénard</i>	22
II,4.4. <i>Système « général »</i>	23
III. PROBLÈME LINÉAIRE SIMPLE	23
III,1. LES OPÉRATEURS $\mathcal{C}_j$ ET H	23
III,1.1. <i>Généralités</i>	23
III,1.2. <i>Définitions de $\mathcal{C}_j$ et H</i>	24
III,1.3. <i>Propriétés de $\mathcal{C}_j$ et H</i>	24
III,2. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA RÉSOUVANTE DE H	25
III,2.1. <i>Propriétés résultant du fait que H est autoadjoint</i>	25

III,2.2. Propriétés résultant de la dissipativité de H	25
III,3. ESTIMATION FONDAMENTALE POUR LA RÉSOVANTE DE H	26
III,3.1. Position du problème	26
III,3.2. Réduction du problème (3,1)	26
III,3.3. Problème intérieur	27
III,3.4. Estimation à la frontière	28
III,4. SEMI-GROUPE $\mathcal{I}(t;H)$ -FORMULATION - ESTIMATIONS	31
III,4.1. Définition du semi-groupe	31
III,4.2. Formulation explicite de $\mathcal{I}(t;H)$	32
III,4.3. Estimations globales pour $\mathcal{I}(t;H)$	33
IV. PROBLÈME LINÉAIRE COMPLET	34
IV,1. L'OPÉRATEUR $\mathcal{A}_\lambda$	34
IV,1.1. Définition	34
IV,1.2. Restriction de $\mathcal{A}_\lambda$ à $H_m \cap \mathcal{W}$	35
IV,1.3. Propriétés de la fonction $\lambda \rightarrow \mathcal{A}_\lambda$	35
IV,1.4. L'opérateur HT_λ	35
IV,2. SPECTRE DE T_λ	36
IV,2.1. Première méthode	36
IV,2.2. Méthode directe	36
IV,2.3. Identité des spectres dans $H_m \cap \mathcal{W}$ et $\hat{J}(\Omega)$	37
IV,3. L'OPÉRATEUR $G(\lambda)$	37
IV,3.1. Définition de $G(\lambda)$	37
IV,3.2. Premières propriétés de $G(\lambda)$	38
IV,3.3. Dépendance par rapport à λ de $\sigma[G(\lambda)]$	38
IV,4. LE SPECTRE DE HT_λ	39
IV,4.1. Structure et dépendance en λ de $\sigma[HT_\lambda]$	39
IV,4.2. Résolvante de HT_λ	40
IV,4.3. Estimations sur la résolvante de HT_λ	40
IV,4.4. Estimations sur la résolvante de HT_λ (suite)	42
IV,5. LE SOUS-ESPACE $S_p(HT_\lambda)$	43
IV,5.1. Définition de $S_p(HT_\lambda)$	43
IV,5.2. Opérateurs de Hilbert-Schmidt	43
IV,6. SEMI-GROUPE $\mathcal{I}(t;HT_\lambda)$ - FORMULATION - ESTIMATIONS	44
IV,6.1. Dominance dissipative de HT_λ	44
IV,6.2. Définition du semi-groupe $\mathcal{I}(t;HT_\lambda)$	45
IV,6.3. Formulation explicite de $\mathcal{I}(t;HT_\lambda)$	46
IV,6.4. Formulation explicite plus élaborée	47
IV,6.5. Estimations pour $\mathcal{I}(t;HT_\lambda)$ et $P_\lambda \mathcal{I}(t;HT_\lambda)$	48
IV,6.6. Solution du problème linéaire	49
IV,7. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\lambda \rightarrow \mathcal{I}(t;HT_\lambda)$	50
IV,7.1. Propriétés globales	50
IV,7.2. Propriétés des termes du développement en série	51
IV,7.3. Problème de stabilité linéaire - λ critique	52
V. PROBLÈME NON LINÉAIRE - GÉNÉRALITÉS	54
V,1. L'OPÉRATEUR B	54
V,1.1. Généralités	54
V,1.2. Définition de l'opérateur B	54
V,1.3. Restriction de B à $\{H_2 \cap \mathcal{W}\}^2$	55

V,2. PREMIÈRE FORMULATION ABSTRAITE DU PROBLÈME	56
V,2.1. <i>Solution généralisée</i>	56
V,2.2. <i>Intérêt de cette première formulation</i>	56
V,3. DEUXIÈME FORMULATION ABSTRAITE - EXISTENCE	57
V,3.1. <i>Nouvelle formulation du problème</i>	57
V,3.2. <i>Dépendance par rapport à λ de $\mathcal{B}(U, V, \lambda)$</i>	57
V,3.3. <i>Existence et unicité d'une solution généralisée sur $[0, T]$</i>	58
V,4. STABILITÉ NON LINÉAIRE DANS LE CAS SOUS-CRITIQUE	59
V,4.1. <i>Existence d'une solution généralisée sur $[0, \infty[$</i>	59
V,4.2. <i>Comportement asymptotique de la solution quand $t \rightarrow \infty$</i>	59
V,4.3. <i>Cas du problème traité par O.A. Ladyzhenskaya</i>	61
V,5. CAS SUR-CRITIQUE, AVEC PERTURBATION INITIALE PARTICULIÈRE	62
V,6. AUTRE FORMULATION POSSIBLE	63
V,6.1. <i>Généralités</i>	63
V,6.2. <i>Cas général</i>	63
V,6.3. <i>Cas où tous les indices valent 1</i>	64
VI. PROBLÈME NON LINÉAIRE STATIONNAIRE - BIFURCATION	65
VI,1. FORMULATION	65
VI,2. DÉCOMPOSITION ET RÉOLUTION PARTIELLE DU SYSTÈME	65
VI,3. RÉOLUTION DANS LE CAS GÉNÉRAL	67
VI,4. QUELQUES CAS PARTICULIERS	69
VI,4.1. <i>Cas où la dimension du sous-espace $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ est impaire</i>	69
VI,4.2. <i>Cas où la multiplicité de λ_0 vaut 1</i>	69
VI,5. CAS OÙ $\mathcal{B}$ DÉPEND ANALYTIQUEMENT DE $\lambda \in I$	72
VII. PROBLÈME NON LINÉAIRE INSTATIONNAIRE - ÉCHANGE DES STABILITÉS	73
VII,1. HYPOTHÈSES	73
VII,1.1. <i>Définition de l'échange des stabilités</i>	73
VII,1.2. <i>Hypothèses restrictives</i>	73
VII,2. FORMULATION COMPLÈTE DU PROBLÈME	74
VII,2.1. <i>Spectre de $H T_\lambda$ pour $\lambda \in \mathcal{U}(\lambda_0)$</i>	74
VII,2.2. <i>Décomposition de l'équation (2,1) - Première forme</i>	75
VII,2.3. <i>Décomposition de l'équation (2,1) - Forme finale</i>	77
VII,3. RÉOLUTION DU SYSTÈME	78
VII,3.1. <i>Résolution de la deuxième équation en γ</i>	78
VII,3.2. <i>Résolution du système (2,23)</i>	78
VII,4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION QUAND $\lambda \rightarrow \lambda_0$	80
VII,4.1. <i>Comparaison de la solution avec celle d'une équation «approchée»</i>	80
VII,4.2. <i>Remarques en ce qui concerne l'évolution vers une solution stationnaire</i>	81
VIII. PROBLÈME NON LINÉAIRE INSTATIONNAIRE - NON-ÉCHANGE DES STABILITÉS	84
VIII,1. HYPOTHÈSES	84
VIII,1.1. <i>Définition</i>	84
VIII,1.2. <i>Hypothèses restrictives</i>	84
VIII,2. FORMULATION COMPLÈTE DU PROBLÈME	85

VIII,2.1. Spectre de HT_λ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$.	85
VIII,2.2. Décomposition de l'équation (V,3,1) - Première forme	85
VIII,2.3. Décomposition de l'équation (V,3,1) - Forme finale	87
VIII,3. RÉSOLUTION DU SYSTÈME	89
VIII,3.1. Résolution de la deuxième équation en γ	89
VIII,3.2. Résolution du système (2,31) sur $[0, \tau]$	90
VIII,3.3. Résolution du système (2,31) sur $[0, \infty[$	91
VIII,3.4. Remarques	95
IX. APPLICATION - PROBLÈME DE BÉNARD	96
IX,1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME	96
IX,2. POSITION DU PROBLÈME	96
IX,3. ÉCHANGE DES STABILITÉS	97
IX,3.1. Propriétés de T_λ	97
IX,3.2. Echange des stabilités	98
IX,4. MULTIPLICITÉ DE λ_0	99
IX,4.1. Périodicité hexagonale	100
IX,4.2. Valeurs propres de T_λ	100
IX,4.3. Un peu d'Arithmétique	101
IX,4.4. Dépendance des valeurs propres par rapport à σ_m	102
IX,4.5. Multiplicités et choix de α	104
IX,5. VÉRIFICATIONS DES HYPOTHÈSES SUR LES TERMES NON LINÉAIRES	105
IX,5.1. Vérification de (VI,4,13)	105
IX,5.2. Vérification de (VI,4,14)	106
IX,6. CONCLUSION	107
X. COMMENTAIRES ET REMARQUES	108
CHAP. II, III, IV, V, VI, VII, VIII.	
RÉFÉRENCES	112
SOMMAIRE - ABSTRACT - ZUSAMMENFASSUNG - Краткое изложение	115

* * *

THÉORIE NON LINÉAIRE DE LA STABILITÉ DES ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

par Gérard IOOSS

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une théorie faiblement non-linéaire de la stabilité des écoulements laminaires :

i) on justifie le critère de stabilité fourni par la linéarisation du système d'équations.

ii) Dans le cas de « l'échange des stabilités », on relie intimement les problèmes instationnaire et stationnaire. On montre, en régime faiblement surcritique, dans quelle mesure on peut affirmer que la solution tend, quand $t \rightarrow \infty$, vers une solution stationnaire, distincte de la solution de base. On effectue à ce sujet une étude complète de la non-unicité des solutions stationnaires du problème. Enfin on vérifie pour le problème de Bénard, toutes les hypothèses faites dans ce cas.

iii) Dans le cas où le mode propre le plus instable oscille à la stabilité neutre, on montre, en régime faiblement surcritique, dans quelle mesure on peut dire que l'écoulement tend quand $t \rightarrow \infty$, vers un écoulement périodique d'amplitude constante.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Ecoulement fluide – Ecoulement laminaire – Stabilité – Systèmes linéaires – Systèmes non linéaires – Variations périodiques – Ecoulement incompressible – Ecoulement visqueux – Ecoulement instationnaire.

(Voir également le sommaire page 115).

NONLINEAR STABILITY THEORY OF LAMINAR FLOWS

SUMMARY

A weakly nonlinear theory of the stability of laminar flows is developed :

i) the stability criterion yielded by the linearisation of the system of equations is justified.

ii) In the case of 'exchange of stabilities', the unsteady and steady problems are shown to be closely related. In the weakly supercritical regime, conditions are found which insure that the solution tends, for $t \rightarrow \infty$, towards a steady solution different from the basic one. A thorough study is made, in this case, of the non-uniqueness of steady solutions. Lastly, all the relevant assumptions made in this case are verified for the Bénard's problem.

iii) In the case when the most unstable eigen mode oscillates at the neutral stability, a study is made of the conditions under which, in the weakly supercritical case, the flow tends, for $t \rightarrow \infty$, towards a periodic flow with constant amplitude.

Descriptors (NASA thesaurus) : Flow stability – Nonlinearity – Laminar flow – Steady flow – Unsteady flow – Flow theory – Fluid flow – Navier-Stokes equations – Viscous fluid – Incompressible flow – Oscillating flow.

(See also the longer abstract page 116).

I. INTRODUCTION

I,1. INTRODUCTION AU PROBLÈME PHYSIQUE

I,1.1. Présentation du problème

Nous ne considérons que des écoulements de fluides visqueux, pouvant donner lieu à des phénomènes thermiques (Chap. IX), mais toujours tels que l'on puisse admettre leur incompressibilité. Soit alors, un écoulement de base, stationnaire, que nous perturbons à l'instant $t = 0$. Le principal objet de notre étude est de voir comment se comporte l'écoulement quand t croît. Si l'écoulement redevient, au bout d'un certain temps, très voisin de l'écoulement de base, on dit que celui-ci est stable, dans le cas contraire on dit qu'il est instable et le problème est de savoir ce qu'il devient. Il peut tendre vers un autre écoulement stationnaire ou même vers un écoulement de structure différente (périodique par rapport au temps, par exemple).

L'autre objet de notre travail est de répondre à la question : « Existe-t-il d'autres solutions aux équations, représentant d'autres écoulements stationnaires, stables lorsque l'écoulement de base ne l'est pas ? ».

I,1.2. Théorie de L. Landau

La première étude sérieuse en théorie non-linéaire de la stabilité des écoulements laminaires est due à L. Landau qui, dès 1944 [38], a expliqué la turbulence de la manière suivante.

Soit le problème linéarisé* autour de la solution représentant l'écoulement de base, il admet en général une infinité de solutions sous la forme de fonctions vectorielles ayant des facteurs de la forme $\exp(\zeta_i t)$. Nous disons que les ζ_i sont les valeurs propres relatives à la théorie linéaire. En général, on peut trouver un paramètre λ représentatif du problème, tel que pour $\lambda < \lambda_c$ les ζ_i aient tous leurs parties réelles négatives et que pour $\lambda > \lambda_c$ au moins une valeur propre ait sa partie réelle positive, c'est-à-dire que dans ces conditions il y a « instabilité linéaire ». Supposons alors, que pour $\lambda = \lambda_c$ les seules valeurs propres de parties réelles nulles soient ζ_0 et $\bar{\zeta}_0$ (conjuguée de ζ_0), distinctes, et qu'il ne leur corresponde qu'un mode propre chacune $U^{(0)} e^{\zeta_0 t}$ et $\bar{U}^{(0)} e^{\bar{\zeta}_0 t}$ respectivement. Quand λ est légèrement supérieur à λ_c , si on note $A(t)$ l'amplitude (petite) du mode propre le plus instable associé à la valeur propre ζ_1 voisine de ζ_0 , alors $A(t)$ vérifie

$$(1,1) \quad \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} = \operatorname{Re} \zeta_1 |A|^2$$

$$\text{et} \quad A(t) = |A(t)| e^{i(\operatorname{Im} \zeta_1 t + \varphi_0)}$$

au voisinage de $t = 0$, comme l'indique la théorie linéaire. L. Landau considère alors, dans le cadre d'une théorie non linéaire, le second membre de (1,1) comme le début d'un développement en série de puissances de A et $\bar{A}$ et, plus $|A(t)|$ croît, plus on doit aller loin dans le développement de ce second membre. En fait, il faut remarquer que ce n'est pas la valeur exacte de $d|A|^2/dt$ qui nous intéresse, mais plutôt sa moyenne temporelle, prise sur une période longue relativement à $2\pi/\operatorname{Im} \zeta_1$. Mais alors, les termes d'ordre 3 du second membre font automatiquement intervenir des termes périodiques qui disparaissent quand on prend leur moyenne, et il suffit de considérer le terme suivant, d'ordre 4, qui ne fait pas intervenir de facteur périodique. L'équation (1,1) devient :

$$(1,2) \quad \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} = \operatorname{Re} \zeta_1 |A|^2 - \alpha |A|^4.$$

On voit que si l'on suppose dans (1,2), $\alpha > 0$, alors la solution tend toujours vers une limite :

$$|A(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} [\operatorname{Re} \zeta_1 / \alpha]^{1/2}.$$

* Notons que la théorie linéaire a été synthétisée par C.C. Lin [12].

Finalement, bien que l'on ait $\lambda > \lambda_c$, nous voyons dans ce cas, que l'amplitude du mode propre le plus instable tend vers une limite finie qui croît quand λ croît, c'est-à-dire que, se superpose à l'écoulement de base, un écoulement périodique dont l'amplitude croît avec λ .

Maintenant, si on fait croître λ , il peut arriver que l'écoulement périodique devienne lui-même instable, et l'on procède de manière analogue à ce qui précède pour trouver un deuxième écoulement, quasi-périodique, se superposant au précédent, qui est stable. Il est bien évident que l'écoulement résultant n'est plus périodique car il y a un mélange de deux oscillations fondamentales avec toutes leurs harmoniques. Néanmoins on peut itérer le raisonnement et l'on considère que, plus λ croît, plus les différences entre les divers modes propres instables s'estompent, et quand la confusion est trop grande on dit qu'il y a « turbulence ».

Cette théorie possède quelques faiblesses, car, comme nous le verrons plus loin, il est nécessaire de rajouter un minimum d'hypothèses pour que (1,2) représente bien le phénomène. En particulier, s'il y a « échange des stabilités » (Chap. VII), c'est-à-dire si $\zeta_0 = \bar{\zeta}_0 = 0$, alors on ne peut plus invoquer la périodicité temporelle pour négliger les termes d'ordre 3 dans (1,2), puisque $\text{Im } \zeta_1 \neq \text{Im } \bar{\zeta}_0 = 0$. D'autre part, même dans le cas où il n'y a pas « échange des stabilités », il est nécessaire d'imposer une condition de nullité sur un des termes d'ordre 3 qui a la périodicité fondamentale (le terme en $A|A|^2$ ou le terme $\bar{A}|A|^2$ dans l'expression de $\bar{A} dA/dt$) pour que ces termes n'influent pas (Chap. VIII).

1.1.3. Problème non-linéaire instationnaire

Ce n'est que depuis une décennie environ, que de nombreux auteurs se sont passionnés pour l'étude de la théorie non-linéaire instationnaire de la stabilité hydrodynamique. La période moderne a été ouverte par le Mémoire capital de **J.T. Stuart** [46], qui a montré comment la substitution des modes propres les plus instables de la théorie linéaire, dans l'équation de l'énergie, permet de caractériser l'évolution des amplitudes de ces modes hors du domaine linéaire et leur évolution ultime éventuelle, vers un régime stationnaire ou périodique. Il a obtenu précisément l'équation (1,2) de **Landau** par cette méthode. Peu après, **J.T. Stuart** [47] et **J. Watson** [53] ont imaginé un processus quasi systématique de construction du système différentiel satisfait par le vecteur X formé avec les amplitudes des modes propres instables :

$$(1,3) \quad \frac{dX}{dt} = \mathcal{L}X - \mathcal{G}(X, X, X),$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur diagonal provenant de la théorie linéaire, constitué par les valeurs propres de parties réelles positives et $\mathcal{G}$ est un polynôme, à valeurs vectorielles, homogène du troisième degré. Pour arriver à (1,3), qui n'est autre qu'une généralisation de (1,2), ces auteurs ont posé des développements a priori, en série de puissances des différentes amplitudes, puis les ont tronqués de manière à n'obtenir que les termes de plus bas degré dans (1,3). Cette méthode s'est avérée très prometteuse et, depuis lors, un grand nombre d'articles en sont des applications. Nous ne les citons pas ici, mais le lecteur intéressé peut se référer au chapitre IX où sont mentionnés certains articles relatifs au problème de Bénard.

Notons enfin que **W. Eckhaus** [11] a imaginé une méthode mettant mieux en lumière le caractère de représentation asymptotique de la méthode de **J.T. Stuart** et **J. Watson**, en mettant en évidence le rôle de petit paramètre joué par la plus grande des parties réelles des valeurs propres de $\mathcal{L}$ dans le système (1,3). Remarquons d'ailleurs, que cette méthode a pu être généralisée par **S. Kogelman** et **R.C. Di Prima** [33].

Mentionnons encore que de nombreux auteurs ont employé la « méthode de l'énergie » (Chap. IX pour réf.), mais celle-ci étant de nature très différente de notre travail, nous n'en parlerons pas outre mesure.

1.1.4. Problème non-linéaire stationnaire

Nous entendons par « problème non-linéaire stationnaire », la recherche, sous certaines conditions, de solutions secondaires des équations, représentant un écoulement stationnaire différent de l'écoulement de base. En fait, ce problème étant traité de manière rigoureuse du point de vue mathématique, nous nous reportons au §I,2 pour en parler. Mentionnons toutefois, qu'une fois l'existence de l'écoulement secondaire prouvée, une étude de stabilité s'impose. C'est ainsi qu'à l'aide de la théorie des perturbations, **V.I. ludovich** [27] et **S.N. Ovchinnikova** et **V.I. ludovich** [39] ont montré respectivement les stabilités linéaires des écoulements secondaires stationnaires des problèmes de Bénard et de Taylor (Chap. II pour la définition de ceux-ci).

1.2. INTRODUCTION AU PROBLÈME MATHÉMATIQUE

Nous pouvons représenter de manière classique le problème physique précédent par un système d'équations aux dérivées partielles (II,4,5), associé à certaines conditions initiales et aux limites. Malheureusement, les moyens classiques ne permettent pas de résoudre un tel système. C'est pourquoi nous sommes amené à le transformer pour le mettre sous une forme plus maniable.

Le premier problème à régler consiste à chercher quel est l'espace fonctionnel adapté au problème. Cette recherche conduit à construire un certain nombre d'espaces constitués de fonctions vectorielles dont les p premières composantes sont de divergence nulle (p étant la dimension de l'espace physique). D'autre part, pour que l'étude des différents opérateurs, qui interviennent dans le second membre du système, soit possible, nous sommes amené à restreindre les propriétés du domaine de l'écoulement : c'est-à-dire choisir soit un domaine borné à frontière régulière, soit un domaine «périodique» à frontière régulière (§ II,1.2).

Ensuite, comme pour la plupart des problèmes non-linéaires, il est très important de connaître le maximum de choses sur le problème linéarisé associé (Chap. IV), afin de considérer les termes non-linéaires comme une sorte de perturbation des termes précédents, puisque toute notre étude repose sur des quantités petites en norme. Pour le problème d'évolution (instationnaire), nous devons chercher s'il existe une solution, unique, dans un certain espace de Banach, pour une certaine équation fonctionnelle (V,2,1), assujettie à une condition initiale. Une fois prouvée l'existence, le problème de l'étude de l'évolution de la solution se posera.

Pour résoudre les problèmes non-linéaires d'existence et d'unicité, nous possédons comme principal outil le théorème classique du point fixe, ou mieux, le théorème des fonctions implicites. Mais, il faut pouvoir se ramener à une équation fonctionnelle de la forme $\mathfrak{F}(U, U_0; \lambda) = 0$, dans un certain espace de Banach (à définir), où sont fixées la condition initiale U_0 et la valeur du paramètre λ du problème. Pour ce faire, nous avons la chance de pouvoir résoudre le problème linéarisé (à caractère parabolique) par l'intervention d'un semi-groupe d'opérateurs bornés dans un certain espace de Hilbert; ainsi nous transformons aisément le système initial en une équation intégrale et il ne reste plus qu'à trouver le bon espace de Banach (où le temps intervient) pour traiter l'équation fonctionnelle (V,3,6) (Chap. V). Malheureusement, pour l'étude de l'évolution de la solution, dans le cas où la solution du problème linéarisé est non bornée quand $t \rightarrow \infty$, il faut raffiner le procédé et décomposer l'équation précédente en deux morceaux dont l'un est «colinéaire» aux termes «divergents». C'est ce que nous faisons aux Chapitres VII et VIII dans les deux cas particuliers très représentatifs, respectivement, de «l'échange des stabilités» avec une valeur propre nulle de multiplicité 1 pour $\lambda = \lambda_c$ et, du «non-échange des stabilités» avec deux valeurs propres imaginaires conjuguées de partie réelle nulle, de multiplicité 1, pour $\lambda = \lambda_c$. On retrouve dans ces deux cas, moyennant certaines hypothèses, l'équation (1,2) de Landau comme représentation asymptotique du second membre, une fois supprimés les termes qui tendent vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ et éventuellement les «termes oscillants»; cela justifie donc dans une large mesure les travaux heuristiques cités plus haut [47], [53], [11], [33].

Il nous reste à présenter le problème stationnaire (il n'y a plus de $\partial/\partial t$), qui est beaucoup plus sympathique que le précédent du point de vue rigueur mathématique, et a donné lieu à un grand nombre de récentes publications. Le problème est de prévoir l'apparition d'une deuxième solution, différente de la solution de base ($U = 0$ en l'occurrence), quand un certain paramètre dépasse une valeur «critique». C'est ce qu'on appelle un problème de «bifurcation»; il peut se formuler de la manière suivante :

$$(2,1) \quad U = K_\lambda(U)$$

où U est la fonction vectorielle inconnue décrivant un certain espace de Hilbert, K_λ étant un opérateur non linéaire tel que $K_\lambda(0) = 0$. On a toujours la solution $U = 0$ et le problème est de savoir si pour certaines valeurs de λ il n'apparaîtrait pas une solution $U \neq 0$, mais voisine de 0 quand même. C'est dans ce cadre que se placent principalement les travaux de V.I. Iudovich [24], [25], [26], W. Velte [50], [51], K. Kirchgässner et P. Sorger [32], H. Görtler, K. Kirchgässner et P. Sorger [18]. Les méthodes employées sont, d'une manière générale, fondées d'une part sur le théorème de Krasnoselskii ([5] p. 198) qui donne une condition suffisante pour l'existence d'une solution secondaire, et d'autre part sur les résultats que l'on trouve par exemple dans l'article de synthèse de M.M. Vainberg et V.A. Trenogin [49] au sujet de la technique de Liapunov-Schmidt.

En fait, notre travail (Chap. VI et VII), grâce à la formulation employée, montre principalement que ces dernières études sont intimement liées aux études sur le problème instationnaire dans le cas où il y a «échange des stabilités», tandis que dans le cas contraire (Chap. VIII), le phénomène a une structure fondamentalement différente.

Enfin, pour prouver l'efficacité de notre méthode, nous l'avons testée sur un problème très classique (Chap. IX), et nous avons montré que toutes les hypothèses, faites au cours des différentes étapes, sont justifiées.

I,3. INDEX

I,3.1. Notations utilisées. Paragraphe où elles apparaissent en premier lieu

Ω	II,1.2	γ_λ	IV,1.4	$A_i^{(j)}(\bar{U}, \dots, \bar{U})$	VI,2
$\partial\Omega$	II,1.2	$\sigma(T_\lambda)$	IV,2.1	$B^{(o)}(U, V)$	VI,2
$\bar{\Gamma}_i$	II,1.2	$E_{(T_\lambda)}(\lambda_o)$	IV,2.2	$R_i^{(j)}(\bar{U}, \dots, \bar{U})$	VI,2
$\bigcup_{i=1}^N (\partial\Omega - \bar{\Gamma}_i)_{(i)}$	II,1.2	$G(\lambda)$	IV,3.1	$F_o(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U})$	VI,2
$\underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$	II,1.3	$E(\mu)$	IV,3.3	$\Psi(\bar{U})$	VI,3
$\underline{C}_o^\infty(\Omega)$	II,1.3	$G^{(\lambda)} \mathcal{E}[\mu; G(\lambda)]$	IV,3.3	$\Psi_1(\bar{U})$	VI,4.1
$J(\Omega)$	II,1.3	$\sigma(HT_\lambda)$	IV,4.1	γ_o	VI,4.2
$L_2(\Omega)$	II,1.4	Φ	IV,4.1	$U^{(o)}$	VI,4.2
$H(\Omega)$	II,1.4	$E(\tau)$	IV,4.1	λ_o	VII,1.1
$W_2^4(\Omega), W_2^m(\Omega)$	II,1.4	${}_{(HT_\lambda)} E_2$	IV,4.3	$W^{(o)}$	VII,1.2
$H_m(\Omega)$	II,1.4	$R(\tau; HT_\lambda)$	IV,4.3	$V^{(o)}$	VI,4.2
$\mathcal{J}(\Omega), \mathcal{W}$	II,1.4	E	IV,4.3	V_1	VI,4.2
Π_o	II,2.2	$\rho(HT_\lambda)$	IV,4.3	$\xi(\lambda)$	VII,2.1
$G_o(\Omega)$	II,2.2	$S_p^{(m)}(HT_\lambda)$	IV,5.1	$E_1(\lambda)$	VII,2.1
$U^{(P)}$	II,1.3	$\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$	IV,6.2	$W_1(\lambda)$	VII,2.1
$\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(X, Y)$	II,2.2	Λ_2	IV,6.3	A, X, Y	VII,2.1
$\ \cdot \ _{\mathcal{L}(X, Y)}$	II,2.2	Λ'_2	IV,6.4	$\tilde{\mathcal{B}}(U, V; \lambda)$	VII,2.2
$\mathcal{T}$	II,3	$\mathcal{C}(\tau; t)$	IV,6.4	$R_1(X, Y; \lambda)$	VII,2.2
$(\cdot, \cdot)_{H_2 \cap W}$	II,3.4	P_λ	IV,6.4	$C(Y, Y)$	VII,2.2
$\mathcal{R}$	II,4.4	$\mathcal{G}_n(t)$	IV,7.1	$X^{(o)}$	VII,2.2
B_o	II,4.4	$\tilde{\mathcal{G}}_n(t)$	IV,7.2	$\tilde{\mathcal{B}}^{(o)}(U, V; \lambda)$	VII,2.2
C_o	II,4.4	$\mathcal{E}_o(\lambda)$	IV,6.5	$R_2(X, X; \lambda)$	VII,2.3
$\mathcal{G}_H$	III,1.2	λ_c	IV,7.3	$\mathcal{R}_1(X, \frac{dx}{dt}; \lambda)$	VII,2.3
$\mathcal{D}_m(H)$	III,1.2	B	V,1.2	$\mathcal{F}(X, Y; \lambda)$	VII,2.3
$R(\tau; H)$	III,2.1	$\mathring{L}_4$	V,1.2	$\Upsilon(U_o, \lambda, t)$	VII,2.3
$\sigma(\mathcal{G}), \sigma(H)$	III,2.2	$\mathcal{M}$	V,1.2	$\tilde{\mathcal{U}}(\Upsilon, X^{(o)}, Y, \lambda)$	VII,3.1
$H_m^o(\Omega) \cap \mathcal{J}(\Omega)$	III,3.1	$\mathcal{B}(U, V; \lambda)$	V,3.1	$\mathcal{V}(\Upsilon, X^{(o)}; \lambda)$	VII,3.1
$U^{(n-P)}$	III,3.2	$\mathbb{I} \cdot \mathbb{I}$	V,3.1	$k(\Upsilon, \lambda)$	VII,3.2
E_1	III,3.4	$I(t, \xi_1)$	V,3.1	$f(\Upsilon, X^{(o)}, \lambda)$	VII,3.2
$\mathcal{I}(t; H)$	III,4.1	$J(t, \xi_1)$	V,3.2	$\mathcal{R}_2(\Upsilon, X^{(o)}, \lambda)$	VII,3.2
Λ_1	III,4.2	$\mathcal{V}(\lambda_o; U_o)$	V,3.3	$\tau_o, \bar{\tau}_o, \eta_o$	VIII,1.2
$\mathbb{I} \cdot \mathbb{I} \mathcal{R}$	III,4.3	$\mathcal{U}(U, U_o; \lambda)$	V,3.3	$E(\tau_o)$	VIII,1.2
Λ'_1	III,4.3	$U_{i,j}$	IV,5.2	$W^{(o)}$	VIII,1.2
$C([0, \infty[; \mathcal{H})$	III,4.3	$E(\tau_i)$	V,6.2	$E(\tau_1)$	VIII,2.1
$\mathcal{A}_\lambda$	IV,1.1	$U_{i,j}^*$	IV,5.2	$E_1(\lambda)$	VIII,2.1
A_o, A_1	IV,1.3	$U_{i,j}^{*(1)}$	V,6.2	$U_1(\lambda)$	VIII,2.1
I	IV,1.3	$A_{i,j}$	IV,5.2	P_λ	VIII,2.1
$T_\lambda, \bar{T}$	IV,1.4	$E(\lambda_o)$	VI,2	$A, X, Y, X^{(o)}$	VIII,2.1
$\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$	IV,1.4	$\mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda)$	VI,2	$\tilde{\mathcal{B}}(U, V; \lambda)$	VIII,2.2
		$\mathcal{P}(\lambda_o; T_\lambda)$	VI,2	α_1, α_2	VIII,2.2
		Θ_n	IV,2.2	$R_1(X^{(o)}, Y, \lambda)$	VIII,2.2

$\varphi(t)$	VIII,2.2	$\mathcal{X}_1(X^{(o)}, Y, \lambda)$	VIII,2.3	$f(Y, X^{(o)}, \lambda, \Psi)$	VIII,3.2
$\tilde{R}(X^{(o)}, Y, \lambda)$	VIII,2.2	$\Upsilon(U_o, \lambda, t)$	VIII,2.3	$\tilde{R}_1(Y, X^{(o)}, \lambda, \Psi)$	VIII,3.2
$S(X^{(o)}, Y, \lambda)$	VIII,2.2	$\Lambda(X^{(o)}, X^{(o)})$	VIII,2.3	$\tilde{S}_1(Y, X^{(o)}, \lambda, \Psi)$	VIII,3.2
$\mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda)$	VIII,2.3	$\tilde{\mathcal{R}}_2(X^{(o)}, Y, \lambda, \Psi)$	VIII,2.3	$\alpha, \beta_1, \beta_2, \xi$	VIII,3.3
$\psi(t)$	VIII,2.3	$\mathcal{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda, \Psi)$	VIII,3.1	$g(A , \varphi, Y, \lambda)$	VIII,3.3
$\mathcal{F}(X^{(o)}, Y, \lambda)$	VIII,2.3	$\mathcal{R}_3(Y, X^{(o)}, \lambda, \Psi)$	VIII,3.2	$\mathcal{Z}(t)$	VIII,3.3
$\mathcal{L}_t(U^{(o)}, \eta_o, \lambda)$	VIII,2.3	$h(Y), \tilde{h}(Y)$	VIII,3.2		

I,3.2. Index des Lemmes et Théorèmes

Lemme 1	§ III,3.4	Estimation de $R(\tau, H)$.
Lemme 2	§ III,4.1	Semi-groupe $\mathcal{I}(t, H)$.
Lemme 3	§ III,4.3	Estimations sur $\mathcal{I}(t, H)$.
Lemme 4	§ IV,4.1	Structure de $\sigma(HT_\lambda)$.
Lemme 5	§ IV,4.3	Estimations de $R(\tau, HT_\lambda)$.
Théorème 1	§ IV,5.2	Structure de $S_p^{(m)}(HT_\lambda)$.
Théorème 2	§ IV,6.2	Semi-groupe $\mathcal{I}(t, HT_\lambda)$.
Lemme 6	§ V,1.3	L'opérateur B bilinéaire.
Lemme 6'	§ V,1.3	L'opérateur B quadratique.
Lemme 7	§ V,3.1	L'opérateur $\mathcal{B}(\cdot, \cdot; \lambda)$.
Lemme 8	§ V,3.3	Théorème d'existence sur $[0, \tau]$.
Théorème 3	§ V,3.3	Existence et propriétés de la solution sur $[0, \tau]$.
Corollaire du Th. 3	§ V,4.1	Existence sur $[0, \infty[$.
Théorème 4	§ V,4.2	Existence et propriétés de la solution en sous-critique.
Théorème 5	§ V,4.3	Existence sur $[0, \tau]$ pour problème spécial.
Théorème 5'	§ V,4.3	Existence sur $[0, \infty[$ pour problème spécial.
Corollaire du Th. 5'	§ V,4.3	Propriétés asymptotiques de la solution.
Théorème 6	§ V,5	Existence sur $[0, \infty[$ pour conditions initiales particulières.
Théorème 7	§ VI,3	Bifurcation dans le cas général.
Corollaire du Th. 7	§ VI,4.1	Bifurcation dans le cas m impair.
Théorème 8	§ VI,4.2	Bifurcation dans le cas $m=1$.
Théorème 9	§ VII,3.2	Existence d'une solution bornée sur $[0, \infty[$ dans le cas sur-critique de l'échange des stabilités.
Corollaire du Th. 9	§ VII,4.1	Comportement de la solution quand $\lambda \rightarrow \lambda_o$.
Théorème 10	§ VII,4.2	Stabilité des solutions secondaires.
Théorème 11	§ VIII,3.3	Existence d'une solution bornée sur $[0, \infty[$ dans le cas sur-critique de non-échange des stabilités.
Lemme 9	§ IX,3.2	Echange des stabilités pour le problème de Bénard.
Lemme 10	§ IX,4.5	Multiplicité de λ_o pour le problème de Bénard.
Théorème 12	§ IX,6	Problème de Bénard - conclusion.

I,3.3. Mode d'emploi des notations

Dans un chapitre donné, nous notons les formules par une suite de deux nombres entiers positifs séparés par une virgule. Exemple : dans le chapitre IV nous avons la formule (6,12). Dans la suite du chapitre en question, s'il est référé à cette formule nous l'appelons par cette suite de deux nombres [Exemple : dans le chapitre

IV, on dira toujours (6,12)]. Par contre, si c'est dans un autre chapitre qu'il y est fait référence, nous la notons par une suite de trois nombres, le premier en chiffre romain désignant le chapitre où elle se trouve [Exemple : au chapitre V on note (IV,6,12) la formule (6,12) du chapitre IV].

En ce qui concerne les références à des paragraphes, nous procédons de manière analogue aux formules, en remplaçant toutefois la deuxième virgule par un point et en supprimant les parenthèses.

Pour les notations, que ce soit celles des différents espaces, des opérateurs ou même des vecteurs, nous nous sommes efforcé de maintenir une certaine homogénéité, en considérant la nature respective de ceux-ci, sans trop nous éloigner des notations déjà employées dans des publications antérieures. Par exemple, les opérateurs faisant intervenir explicitement le temps t , sont notés de préférence en lettres gothiques.

II. PRÉLIMINAIRES

II.1. ESPACES FONCTIONNELS

II.1.1. Généralités

Les domaines dans lesquels nous travaillons sont de deux sortes, *i*) les domaines bornés qui se traitent bien mathématiquement, *ii*) les domaines infinis. Ces derniers créent de grosses difficultés mathématiques, insurmontables pour ce à quoi nous voulons arriver, et c'est pourquoi nous considérons, dans ce cas, des fonctions périodiques dans l'espace, ce que font d'ailleurs la plupart des auteurs désireux d'obtenir des résultats rigoureux. Dans ce qui suit, nous nous efforçons de donner des démonstrations valables à la fois dans le cas du domaine borné (*i*) et dans le cas périodique (*ii*). Remarquons d'une manière générale qu'en fait le premier cas est fondamentalement plus délicat à traiter que le second, car celui-ci permet de se ramener à des problèmes unidimensionnels plus élémentaires.

II.1.2. Définition du domaine

Cas (i). Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3) dont la frontière $\partial\Omega$ est une variété de dimension $p-1$, de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^p$, de telle sorte que $\bar{\Omega}$ soit une variété de dimension p , avec bord $\partial\Omega$, de classe C^∞ .

Cas (ii). Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3), tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété de dimension p avec pseudo-bord $\partial\Omega$, de classe C^∞ . On suppose de plus que Ω est tel que tout le domaine de l'écoulement pour le problème considéré soit décomposable en une réunion d'une infinité de domaines translatés de Ω , adjacents les uns aux autres. Nous notons $\bar{\Gamma}_1$ la partie fermée de $\partial\Omega$ commune à $\bar{\Omega}$ et aux translatés de $\bar{\Omega}$ adjacents à celui-ci. Nous supposons alors essentiellement que $\bar{\Gamma}_1 \subset \partial\Omega$ strictement et que la partie ouverte $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ de $\partial\Omega$ « se raccorde bien » avec les parties translatées adjacentes, c'est-à-dire que la frontière de la variété, de dimension $p-1$, $\bigcup_{i=1}^N (\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)_{(i)}$ n'est pas un lieu de singularités pour la variété avec bord, de dimension $p-1$, les indices correspondant aux domaines adjacents à Ω . Par exemple, dans le cas $p = 2$, on peut avoir la configuration :

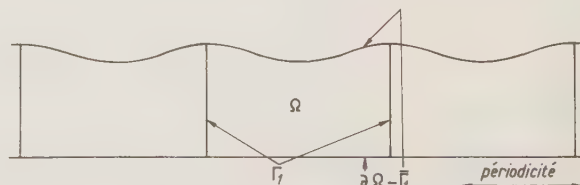


Fig. 1 - Configuration possible ($p = 2$).

tandis que les configurations suivantes sont exclues :



Fig. 2 - Configurations exclues ($p = 2$).

Exemples pratiques pour le cas (ii). Pour le problème de Bénard, traité au chapitre IX, Ω peut être choisi sous la forme d'un prisme droit à section hexagonale. Pour le problème de Couette, entre deux cylindres concentriques, Ω peut être choisi toroïdal. D'une manière générale pour un problème particulier, il peut y avoir plusieurs formes possibles de périodicité spatiale, et c'est pourquoi il faut toutes les considérer, en fait, et regarder ensuite laquelle est stable quand on fait varier les différents paramètres du problème.

II,1.3. Espaces fonctionnels réguliers

1. L'espace $\underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$.

Dans le cas (i) :

$$\underline{C}^\infty(\bar{\Omega}) = \left\{ U; U = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) \text{ , } n \geq p \text{ , pour } i = 1, \dots, n \text{ , } u^{(i)} \right.$$

est une fonction à valeurs complexes indéfiniment continuellement différentiable dans $\bar{\Omega}$ ($u^{(i)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$) $\left. \right\}$.

Dans le cas (ii), on dit qu'une fonction «admet la périodicité (Ω)» si Ω est son domaine fondamental de périodicité spatiale.

Définissons alors :

$$\underline{C}^\infty(\bar{\Omega}) = \left\{ U; U = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) \text{ , } n \geq p \text{ , } u^{(i)} \in C^\infty(\bar{\Omega}_i) \text{ , } u^{(i)} \right.$$

admet la périodicité (Ω) , $i = 1, \dots, n$ $\left. \right\}$.

2. L'espace $\underline{C}_0^\infty(\Omega)$.

Dans le cas (i) :

$$\underline{C}_0^\infty(\Omega) = \left\{ U; U \in \underline{C}^\infty(\bar{\Omega}) \text{ , } u^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega) \text{ , } i = 1, \dots, n \right.$$

(fonctions indéfiniment continuellement dérivables à support compact dans Ω) $\left. \right\}$.

Dans le cas (ii), définissons la propriété (ϖ) ; nous dirons que le support d'une fonction vérifie la propriété (ϖ) si l'intersection de ce support avec $\bar{\Omega}$ est compacte et strictement incluse dans $\Omega \cup \Gamma_1$. On peut alors définir

$$\underline{C}_0^\infty(\Omega) = \left\{ U; U \in \underline{C}^\infty(\bar{\Omega}) \text{ , le support de } u^{(i)} \text{ (} i = 1, \dots, n \text{) vérifie la propriété } (\varpi) \right\}.$$

3. L'espace $J(\Omega)$.

$$J(\Omega) = \left\{ U; U \in \underline{C}_0^\infty(\Omega) \text{ , } \sum_{i=1}^p \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_i} = 0 \right\}.$$

Dans cet espace le champ $U^{(p)} = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$ est solénoïdal.

II,1.4. Espaces fonctionnels hilbertiens

Nous notons dans tous les cas $L_2(\Omega)$ le complété de $\underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$ avec la norme associée au produit scalaire

$$(1,1) \quad (U, V)_{L_2} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u^{(i)} \cdot \bar{v}^{(i)} dx \quad (dx \equiv dx_1 \dots dx_p)$$

De manière classique, c'est aussi le complété de $\underline{C}_0^\infty(\Omega)$ avec la même norme.

Définissons maintenant l'espace $H(\Omega)$ qui est le complété de $\underline{C}_0^\infty(\Omega)$ avec la norme associée au produit scalaire

$$(1,2) \quad (U, V)_H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \int_{\Omega} \partial_j u^{(i)} \cdot \partial_j \bar{v}^{(i)} dx \quad (\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

En fait, pour montrer que $\{(U, U)_H\}^{1/2} = \|U\|_H$ est une norme, il suffit de remarquer que dans tous les cas on a une inégalité du type Poincaré :

$$(1,3) \quad \forall U \in H \quad \|U\|_{L_2} \leq K \|U\|_H$$

K étant une certaine constante positive dépendant de Ω . Pour le cas (i) (1,3) est classique; pour le cas (ii) (1,3) est conséquence du fait que $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1 \neq \emptyset$. Remarquons enfin que $\|\cdot\|_H$ est une norme équivalente à la norme classique de l'espace de Sobolev $W_2^1(\Omega)$:

$$(1,4) \quad \|U\|_{W_2^1} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \int_{\Omega} |\partial_j u^{(i)}|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u^{(i)}|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Notons $H_m(\Omega)$, m entier, le complété de $\underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$ avec la norme classique de l'espace de Sobolev $W_2^m(\Omega)$ [$H_0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$].

Par exemple, pour $H_2(\Omega)$ on a

$$(1,5) \quad \|U\|_{H_2} = \|U\|_{W_2^2} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^p \int_{\Omega} |\partial_j \partial_k u^{(i)}|^2 dx + \|U\|_{W_2^1}^2 \right\}^{1/2}.$$

Nous utiliserons quelquefois l'espace $H_m(\Omega) \cap H(\Omega)$, $m \geq 1$. C'est un espace de Hilbert avec le produit scalaire de $H_m(\Omega)$ et nous pouvons, en fait, lui donner une autre définition : c'est la fermeture dans $H_m(\Omega)$ de l'espace constitué par les éléments $U \in \underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$ tels que $U=0$ sur $\partial\Omega$ dans le cas (i), et $U=0$ sur $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ dans le cas (ii). L'équivalence entre cette définition et la précédente est conséquence du théorème de la page 68 de Lions et Magenes [7].

Enfin, définissons quelques sous-espaces des précédents, qui s'avèrent fondamentaux pour notre étude. D'abord, $\hat{J}(\Omega)$ est la fermeture dans $L_2(\Omega)$ de $J(\Omega)$, puis $\mathcal{W}$ est la fermeture dans $H(\Omega)$ de $J(\Omega)$; enfin nous utiliserons souvent l'espace $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, dont nous choisirons le produit scalaire plus loin. Notons que tous les espaces définis dans ce § II,1.4 sont hilbertiens avec les produits scalaires choisis.

II.2. OPÉRATEUR Π_0

II.2.1. Généralités

Pour l'étude des écoulements incompressibles, il est bien connu que l'on peut éliminer la pression des équations de conservation de la quantité de mouvement en prenant le rotationnel de celles-ci. L'inconvénient majeur de ce procédé est l'élévation des ordres de dérivation. En conséquence, pour éviter cela, nous allons construire un opérateur qui s'annule si on l'applique à un gradient et laisse invariant une certaine classe de fonctions vectorielles de divergence nulle.

II.2.2. Construction dans $L_2(\Omega)$

Notons $G_0(\Omega)$ le supplémentaire orthogonal de $\hat{J}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$. On remarque immédiatement que les $n-p$ dernières composantes de $U \in G_0(\Omega)$ sont nulles puisqu'on n'impose pas de condition particulière à ces composantes dans $\hat{J}(\Omega)$ par rapport aux éléments de $L_2(\Omega)$. De plus, dans le cas (i) O.A. Ladyzhenskaya [6] p. 28-30 a montré que si $U \in G_0(\Omega)$, alors $\exists \varphi \in W_2^1(\Omega)$ (espace scalaire) tel que $* U^{(p)} = \nabla \varphi$ [nous noterons dorénavant $U = \nabla \varphi = (\partial_1 \varphi, \dots, \partial_{n-p} \varphi, 0, \dots, 0)$]. Quant au cas (ii) la même démonstration reste valable mot pour mot une fois que l'on a remarqué qu'une fonction à support compact dans Ω peut être prolongée aisément par périodicité. Il en résulte qu'il existe une projection orthogonale Π_0 de $L_2(\Omega)$ sur $\hat{J}(\Omega)$ telle que,

$$\forall U \in L_2(\Omega), U = \Pi_0 U + \nabla \varphi, \quad \Pi_0 U \in \hat{J}(\Omega), \quad \Pi_0 \nabla \varphi = 0, \quad \|\Pi_0\|_{\mathcal{L}(L_2)} = 1.$$

Notation : nous noterons dans ce qui suit $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de l'espace de Banach X dans l'espace de Banach Y . La norme de cet espace sera notée $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. Dans le cas $X=Y$ nous noterons $\mathcal{L}(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

* Notation de II,1.3.3.

II,2.3. Construction dans $H_m(\Omega)$, $m \geq 1$

Nous allons maintenant construire la restriction de Π_0 à $H_m(\Omega)$, $m \geq 1$. Remarquons d'abord que si $U \in H_m(\Omega)$, $\nabla \cdot U^{(p)} \in H_{m-1}(\Omega)$ (espace scalaire), et $U^{(p)} \cdot n \in W_2^{m-1/2}(\partial\Omega)$ dans le cas (i) (respectivement $W_2^{m-1/2}(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)$ dans le cas (ii)) si n est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ (respectivement à $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$). En fait, la notation $W_2^{m-1/2}(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)$ demande à être précisée puisque $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ est une variété, avec bord, de dimension $p-1$. En fait, il suffit de remarquer que $(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)$ est compacte dans $\mathbb{R}^p$ et recouvrable par une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^p$, chacun associé à une carte locale définissant $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$, et l'on peut alors définir de manière analogue à [7] p. 38-40 une norme (Inf. des normes associées aux différents recouvrements de $(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)$, par exemple) dans $W_2^{m-1/2}(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)$. Il est bien évident que cette définition est rendue possible par le fait que $U^{(p)} \cdot n$ est défini, grâce à la périodicité, sur une variété contenant $(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)$.

Soient alors, les problèmes suivants :
dans le cas (i) :

$$(2,1)_{(i)} \quad \begin{cases} \Delta \varphi = \nabla \cdot U^{(p)} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{\partial\Omega} = U^{(p)} \cdot n, \end{cases}$$

dans le cas (ii) :

$$(2,1)_{(ii)} \quad \begin{cases} \Delta \varphi = \nabla \cdot U^{(p)} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1} = U^{(p)} \cdot n, \\ \varphi & \text{admet la périodicité } (\Omega). \end{cases}$$

Pour résoudre $(2,1)_{(i)}$, utilisons le théorème 5.3. p. 175 de [7]. L'opérateur $\{\Delta; \frac{d}{dn}\}$ de $H_{m+1}(\Omega)$ dans $H_{m-1}(\Omega) \times W_2^{m-1/2}(\partial\Omega)$ a un noyau N de dimension 1 constitué des fonctions q telles que $q \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, $\Delta q = 0$, $\frac{dq}{dn} \Big|_{\partial\Omega} = 0$. C'est-à-dire que $N = \{q; q = Cte\}$. D'autre part la condition de compacité du second membre de $(2,1)_{(i)}$ est satisfaite puisque

$$\forall v \in N^* = \left\{ v; v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \Delta v = 0, \frac{dv}{dn} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

on a

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot U^{(p)}] \bar{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} [U^{(p)} \cdot n] \bar{v} \, ds = 0$$

car $v = Cte$. Il en résulte que $\{\nabla \cdot U^{(p)}, U^{(p)} \cdot n\}$ appartient à l'image de $H_{m+1}(\Omega)$ par $\{\Delta; \frac{d}{dn}\}$, et donc, qu'il existe une solution unique à une constante près du problème $(2,1)_{(i)}$, telle que

$$(2,2) \quad \|\varphi\|_{H_{m+1}} \leq \gamma_1 \left\{ \|\nabla \cdot U^{(p)}\|_{H_{m-1}}^2 + \|U^{(p)} \cdot n\|_{W_2^{m-1/2}(\partial\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \leq \gamma_2 \|U\|_{H_m},$$

γ_2 étant une constante dépendant de m .

Pour résoudre $(2,1)_{(ii)}$, qui est fondamentalement plus simple, dans la pratique, que $(2,1)_{(i)}$, on peut raisonner par analogie avec $(2,1)_{(i)}$. Remarquons que pour des fonctions de périodicité (Ω) , les intégrales de surfaces intervenant dans les formules de Green ne font plus intervenir que $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ puisque la portion $\bar{\Gamma}_1$ donne des termes s'annulant par périodicité. Le problème adjoint à $(2,1)_{(ii)}$ sera donc l'analogue du problème adjoint à $(2,1)_{(i)}$, avec $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ à la place de $\partial\Omega$. D'autre part, procédant par analogie avec [7] p. 134-175, l'étude de la « régularité à l'intérieur » de la solution se translate grâce à la périodicité, ce qui permet de régler le problème de la régularité au voisinage de $\bar{\Gamma}_1$. Quant au problème de la régularité au voisinage de $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$, il se traite de la même manière que pour le cas $(2,1)_{(i)}$. Enfin, on peut conclure que les problèmes $(2,1)_{(i)}$ et $(2,1)_{(ii)}$ admettent chacun une solution unique φ à une constante près, qui vérifie $\|\varphi\|_{H_{m+1}} \leq \gamma_2 \|U\|_{H_m}$, où l'on a noté $\|\varphi\|_{H_{m+1}} \equiv \inf_{cte} \|\varphi + cte\|_{H_{m+1}}$. Il en résulte que $\nabla \varphi$ est unique dans $H_m(\Omega)$ et que si

l'on note $U_1 = U - \nabla \varphi$, on a $U_1 \in H_m(\Omega)$, $U_1^{(p)} \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (respectivement $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$) et $\nabla \cdot U_1^{(p)} = 0$. Montrons que $U_1 \in \tilde{J}(\Omega)$; pour cela montrons que $\forall \nabla p \in G_0(\Omega)$, on a $(U_1, \nabla p)_{L_2} = 0$:

$$\int_{\Omega} U_1 \cdot \nabla \bar{p} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\bar{p} U_1^{(p)}) \, dx = \int_{\partial\Omega} [U_1^{(p)} \cdot n] \bar{p} \, ds = \int_{\Gamma_1} [U_1^{(p)} \cdot n] \bar{p} \, ds,$$

la dernière intégrale est nulle dans le cas (i) car $\Gamma_1 = \emptyset$, et dans le cas (ii) à cause de la périodicité de p et U_1 , et du fait que n est la normale extérieure. Il en résulte que U_1 n'est autre que $\Pi_0 U$ puisque la décomposition de U est unique et que l'on a $U = U_1 + \nabla \varphi$, d'où

$$(2,3) \quad \|\Pi_0\|_{\mathcal{L}(H_m, H_m \cap \tilde{J})} = \gamma,$$

pour une certaine constante γ dépendant de m .

Remarque - Il faut bien voir que si $U \in H_m(\Omega) \cap H(\Omega)$, alors Π_0 ne conserve pas la trace sur $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$) puisque ce n'est que $(\Pi_0 U)^{(p)} \cdot n$ et les $n-p$ dernières composantes de $\Pi_0 U$ qui sont nuls.

II.3. OPÉRATEUR $\mathcal{C}$

II.3.1. Généralités

Nous allons introduire ici un opérateur qui, une fois ses propriétés bien connues, nous permettra de simplifier et systématiser l'écriture des équations dans les différents espaces fonctionnels. L'importance de cet opérateur est d'ailleurs visible dans [6] p. 33-74, où deux chapitres lui sont consacrés (implicitement).

En fait, il s'agit de résoudre le problème :

$$(3,1) \quad \begin{cases} \Delta U - \nabla q = V \in H_m(\Omega), & m \geq 0 \\ \nabla \cdot U^{(p)} = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega,$$

avec comme conditions supplémentaires, dans le cas (i) : $U|_{\partial\Omega} = 0$ et dans le cas (ii) $U|_{\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1} = 0$, U et q admettent la périodicité (Ω). On peut décomposer (3,1) en deux problèmes plus simples :

$$(3,2) \quad \begin{cases} \Delta U^{(p)} - \nabla q = V^{(p)}, \\ \nabla \cdot U^{(p)} = 0, \\ + \text{conditions supplémentaires,} \end{cases}$$

et

$$(3,3) \quad \begin{cases} \Delta u^{(p+k)} = v^{(p+k)}, & k = 1, \dots, n-p, \\ + \text{conditions supplémentaires.} \end{cases}$$

Il faut alors remarquer que (3,3) est complètement découplé et se traite de manière très classique. Dans le cas (i) il devient un problème de Dirichlet pour chacune des $n-p$ fonctions $u^{(p+k)}$; dans le cas (ii) on procède par le même raisonnement qu'au II.2.3, par analogie au cas (i). Finalement (3,3) admet une solution unique, qui vérifie :

$$(3,4) \quad \sum_{k=1}^{n-p} \|u^{(p+k)}\|_{W_2^{m+2}}^2 \leq C \sum_{k=1}^{n-p} \|v^{(p+k)}\|_{W_2^m}^2.$$

II.3.2. Résolution de (3,1). Régularité intérieure

L'application $U \rightarrow -(V, U)_{L_2}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{W}$, car on a

$$|(V, U)_{L_2}| \leq \|V\|_{L_2} \|U\|_{L_2} \leq K \|V\|_{L_2} \|U\|_{\mathcal{W}}, \quad \text{d'après (1,3).}$$

D'après le théorème de Riesz, il existe $\mathcal{E}V$ unique dans $\mathcal{W}$ tel que $(\mathcal{E}V, U)_{\mathcal{W}} = -(V, U)_{L_2}$, $\forall U \in \mathcal{W}$. L'application $V \rightarrow \mathcal{E}V$ de $L_2(\Omega)$ dans $\mathcal{W}$ est linéaire continue et vérifie

$$(3,5) \quad \|\mathcal{E}V\|_{\mathcal{W}} \leq K \|V\|_{L_2}.$$

En fait, nous allons montrer que $\mathcal{E}V \in H_{m+2} \cap \mathcal{W}$. Pour cela on montre d'abord la « régularité intérieure ». Le cas (i) est traité dans [6] p. 38-40; le cas (ii) se traite analogiquement : dans une première étape (Fig. 3), on montre de la même manière que dans [6] p. 38 que $\mathcal{E}V \in W_2^{m+2}(\Omega'')$ où $\Omega'' \subset \subset \Omega$ (inclus dans un compact inclus dans Ω) en remarquant qu'une fonction à support compact dans Ω peut être prolongée immédiatement sous la forme d'une fonction de périodicité (Ω). Puis, on définit un sous-domaine de périodicité Ω' (Fig. 3), tel que $\Omega' \subset \subset \Omega \cup \Gamma_1$. On peut le construire de la manière suivante : considérons la variété $(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)'$ parallèle à $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$, intérieure à Ω , à la distance ε de $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$, ε suffisamment petit pour que cette variété soit C^∞ ; construite ainsi, $(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)'$ et $\bigcup_{i=1}^N (\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)_{(i)}'$ ont les mêmes propriétés de régularité, signalées au § II,1.2., que $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ et $\bigcup_{i=1}^N (\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)_{(i)}$. ε étant choisi assez petit, on a donc un nouveau domaine de périodicité $\Omega' \subset \subset \Omega \cup \Gamma_1$, de frontière $(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)' \cup \{\text{partie de } \Gamma_1\}$.

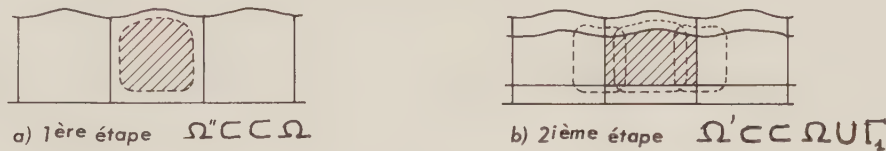


Fig. 3 - Régularité intérieure.

Maintenant recouvrons Ω' par différents Ω'' relatifs à des domaines Ω différents ($\bar{\Omega}'$ étant compact, on recouvre par un nombre fini de Ω'') (Fig. 3 b). Si l'on renouvelle dans chaque Ω'' le raisonnement fait précédemment, on trouve que $U = \mathcal{E}V \in H_{m+2}(\Omega')$ et qu'il vient, $\forall W \in J(\Omega') \subset J(\Omega)$

$$(V, W)_{L_2} = -(\mathcal{E}V, W)_{\mathcal{W}} = (\Delta \mathcal{E}V, W)_{L_2}.$$

D'où $(\Delta \mathcal{E}V - V, W)_{L_2} = 0 \quad \forall W \in J(\Omega')$ dense dans $J(\Omega)$ et $\Delta \mathcal{E}V - V \in G_0(\Omega') \cap H_m(\Omega')$.

On en conclue qu'il existe q tel que $\nabla q \in H_m(\Omega')$, vérifiant $\Delta \mathcal{E}V - \nabla q = V$ dans Ω' , c'est-à-dire que $\mathcal{E}V$ est solution dans Ω' de (3,1). De plus, on a l'estimation :

$$(3,6) \quad \|U\|_{H_{m+2}(\Omega')} + \|\nabla q\|_{H_m(\Omega')} \leq \gamma_3 \|V\|_{H_m(\Omega)}$$

pour une certaine constante γ_3 indépendante de V .

II,3.3. Résolution de (3,1). Régularité globale

Le problème (3,1), dans le cas (i), avec $n = p = 2$ ou 3 est traité dans [6] p. 47-74 et l'on pourrait se contenter de cette démonstration pour les p premières équations de notre système si l'on se restreignait au cas (i), mais celle-ci ne peut se modifier de manière évidente pour être applicable au cas (ii), c'est pourquoi nous allons procéder différemment, afin de grouper autant que possible les deux cas.

D'après le § II,3.2 on sait qu'il existe $U \in H_{m+2}(\Omega')$ et $\nabla q \in H_m(\Omega')$ solutions de (3,1) dans Ω' ; montrons d'abord qu'il en découle : $q \in L_2(\Omega)$. Pour tout $W \in \underline{C}_0^\infty(\Omega)$ on a, à partir de (3,1), en intégrant par parties

$$(3,7) \quad -(\nabla q, W)_{L_2} = (q, \nabla \cdot W)_{L_2} = (U, W)_H + (V, W)_{L_2}$$

puisque'il suffit de considérer Ω' contenant le support de W . (3,7) donne alors $\forall W \in \underline{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$(3,8) \quad |(q, \nabla \cdot W)_{L_2}| \leq (\|U\|_{\mathcal{W}} + K \|V\|_{L_2}) \cdot \|W\|_H \leq 2K \|V\|_{L_2} \|W\|_H.$$

Nous allons alors supposer qu'il existe un opérateur R (relèvement) de $\underline{C}_0^\infty(\Omega)$ (scalaire) dans $\underline{C}_0^\infty(\Omega)$ (vectoriel), prolongeable en un opérateur continu de $L_2(\Omega)$ dans $H(\Omega)$ tel que, dans le cas (ii)

$$\begin{cases} \nabla \cdot (RZ) = Z \\ RZ = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \bar{\Gamma}_1 \\ RZ \text{ admet la périodicité } (\Omega), \end{cases}$$

les deux dernières conditions étant remplacées par $RZ|_{\partial\Omega} = 0$ dans le cas (i). Il est bien évident que dans la pratique une infinité de tels opérateurs existent (régularité de $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$) - on en choisit alors un (dans le cas (i) on se ramène immédiatement au problème traité en [6] p. 24-26; dans le cas (ii) on a intérêt à procéder directement sur l'exemple à traiter). (3,8) donne $\forall Z \in \underline{C}_0^\infty(\Omega)$ (scalaire)

$$|(q, Z)_{L_2}| \leq 2K \|V\|_{L_2} \|R\|_{\mathcal{L}(L_2, H)} \|Z\|_{L_2},$$

et il en résulte que $q \in L_2(\Omega)$.

Remarque - Dans le cas (i), (3,7) donne directement $\nabla q \in H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H(\Omega)$ si on identifie $L_2(\Omega)$ à son dual); mais pour le cas (ii) $H^{-1}(\Omega)$ n'est pas défini et nous ne pouvons l'utiliser sans précautions.

Avant de poursuivre, définissons quelques notations pour le cas (ii) (le cas (i) se traite en remplaçant $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ par $\partial\Omega$ dans les raisonnements), qui nous serviront dans la suite. Soit $\mathcal{O}_j$, $j = 1, \dots, M$ une famille d'ouverts

bornés de $\mathbb{R}^p$ tels que $\bigcup_{j=1}^M \mathcal{O}_j$ recouvre $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$; de plus, pour j fixé, il existe une translation-rotation des

axes telle que $\mathcal{O}_j \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^N \overline{(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)_{(i)}} \right\}$ puisse se représenter par la carte locale $x_p = F_j(x_1, \dots, x_{p-1})$

où $F_j(0) = 0$ et $F'_j(0) = 0$, $i = 1, \dots, p-1$, F_j étant indéfiniment différentiable de

$\mathcal{O}_j \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_{(i)} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$. Enfin, l'application $(x_1, \dots, x_p) \rightarrow x_p - F_j(x_1, \dots, x_{p-1}) = y_p$

envoie $\mathcal{O}_j \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^N \overline{(\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1)_{(i)}} \right\}$ dans $[0, 1[$; et si $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$ on a des relations de compa-

tibilité évidentes. Soit enfin une partition de l'unité subordonnée à $\tilde{\Omega} = \bigcup_{j=1}^M \left\{ \mathcal{O}_j \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_{(i)} \right\} \right\}$ (voisinage

de la frontière $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$), telle que $\alpha_j \in C^\infty(\tilde{\Omega})$, α_j à support compact dans $\mathcal{O}_j \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_{(i)} \right\}$,

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j = 1 \quad \text{sur } \tilde{\Omega}.$$

Attaquons nous aux p premières équations du système (3,1), les $n-p$ autres ayant été résolues au §II,3.1, afin d'estimer U et q au voisinage de $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ (pour le cas (ii)). Le problème est invariant par translation-rotation des axes; nous allons donc effectuer le changement de variables

$$\begin{cases} y_i = x_i, & i = 1, \dots, p-1, \\ y_p = x_p - F_j(x_1, \dots, x_{p-1}) \end{cases}$$

après la translation-rotation associée à $\mathcal{O}_j$.

Notons pour simplifier l'écriture

$$\begin{cases} \bar{f} = \alpha_j V - q \nabla \alpha_j + 2 \nabla \alpha_j \cdot \nabla U + U \cdot \Delta \alpha_j, \\ g = U \cdot \nabla \alpha_j, \\ \alpha_j U = W, \quad \alpha_j q = Q, \end{cases}$$

et $\bar{F}_j = F$ (pas d'ambiguïté possible). Les p premières équations de (3,1) donnent, après changement de variables :

$$(3,9) \quad \begin{cases} \Delta_y W - \nabla_y Q = \bar{f} + 2 F'_{y_i} \partial_{y_i y_p}^2 W - F'_{y_i} F'_{y_i} \partial_{y_p}^2 W + F''_{y_i y_i} \partial_{y_p} W - \partial_{y_p} Q \cdot \nabla_y F, \\ \nabla_y \cdot W = g + F'_{y_i} \partial_{y_p} W^{(i)}, \\ W = 0 \text{ pour } y_p = 0 \text{ et } y_p \geq 1, \end{cases}$$

et ce système doit être vérifié pour $y_p > 0$. Les sommations par rapport à l'indice i se font de 1 à $p-1$ et l'on a, a priori, l'estimation

$$(3,10) \quad \|\bar{f} + F''_{y_i y_i} \partial_{y_p} W\|_{H^0} + \|g\|_{H^1} \leq \gamma_4 \|V\|_{L_2},$$

où $\|\cdot\|_{H^m}$ représente la norme* de $H^m(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^+)$ avec les variables $\{y_i\}$. En fait, modifions (3,9)

en posant $W = W_1 + W_0$ avec $W_0 = (0, \dots, 0, F'_{y_i} W^{(i)})$,

$$\begin{aligned} L(W, Q) &= 2 F'_{y_i} \partial_{y_i y_p}^2 W - F'_{y_i} F'_{y_i} \partial_{y_p}^2 W - \partial_{y_p} Q \cdot \nabla_y F, \\ \Delta_y W_0 &= (0, \dots, 0, F'_{y_i} \Delta_y W^{(i)}) + L_1(W) = \bar{k} F'_{y_i} \Delta_y W^{(i)} + L_1(W), \\ L_1(W) &= (0, \dots, 0, F^{(3)}_{y_i y_i y_i} W^{(i)} + 2 F''_{y_i y_i} \partial_{y_p} W^{(i)}). \end{aligned}$$

on obtient :

$$(3,11) \quad \begin{cases} \Delta_y W_1 - \nabla_y Q = \bar{f} + F''_{y_i y_i} \partial_{y_p} W - L_1(W) - \bar{k} F'_{y_i} \Delta_y W^{(i)} + L(W_1 + W_0, Q), \\ \nabla_y \cdot W_1 = g, \\ W_1 = 0 \text{ pour } y_p = 0 \text{ et } y_p \geq 1, \end{cases}$$

avec l'estimation :

$$(3,12) \quad \|\bar{f} + F''_{y_i y_i} \partial_{y_p} W - L_1(W)\|_{H^0} + \|g\|_{H^1} \leq \gamma_5 \|V\|_{L_2}.$$

Le problème (3,11), (3,12) dans le demi-espace $y_p > 0$ se traite alors de la manière suivante : on étudie d'abord le problème

$$(3,13) \quad \begin{cases} \Delta_y W - \nabla_y Q = \bar{f}_1, \\ \nabla_y \cdot W = g_1, \\ W = 0 \text{ pour } y_p = 0 \text{ et } y_p = +\infty, \end{cases}$$

qui permet d'introduire un opérateur $\mathcal{F}$ continu de $H^0 \times H^1$ dans $H^2 \times H^1$ tel que $(W, Q) = \mathcal{F}(\bar{f}_1, g_1)$ et qu'il existe une constante γ_6 telle que

$$(3,14) \quad \|W\|_{H^2} + \|\nabla Q\|_{H^0} \leq \gamma_6 [\|\bar{f}_1\|_{H^0} + \|g_1\|_{H^1}].$$

Nous ne décrivons pas les calculs ici, qui ne sont que des détails purement techniques et sans intérêt pour la suite. En gros, on cherche le noyau de Green de (3,13) en effectuant une transformation de Fourier sur les $p-1$ variables $y_1, \dots, y_{p-1}$; puis, en retirant de celui-ci la partie provenant de la solution élémentaire ainsi que la partie provenant de la solution élémentaire «réfléchie», parties dont on peut formuler les originales ([6] p. 49), on effectue les estimations voulues pour arriver à (3,14). A l'aide de $\mathcal{F}$ le problème (3,11) se formule

* Définie par exemple dans [7] p. 37.

de la manière suivante :

$$(3,15) \quad (W_1, Q) = \mathcal{F}[\bar{f} + F''_{y_i y_i} \partial_{y_i} W - L_1(W), g] + \mathcal{F}[L(W_1 + W_0, Q) - \bar{k} F'_{y_i} \Delta_y W^{(\omega)}, 0] .$$

Il faut alors remarquer que, par définition de W_0 , on a

$$\|W\|_{H^2} \leq \|W_1\|_{H^2} + \|W_0\|_{H^2} \leq \|W_1\|_{H^2} + \varepsilon_1 \|W\|_{H^2} + \gamma_7 \|W\|_{H^4}$$

et, a priori, $\|W\|_{H^4} \leq \gamma_8 \|V\|_{L_2}$, ce qui entraîne

$$(3,16) \quad \|W\|_{H^2} \leq \gamma_9 (\|W_1\|_{H^2} + \|V\|_{L_2}) ;$$

puis, par définition de L , on a

$$(3,17) \quad \begin{aligned} \|L(W_1 + W_0, Q) - \bar{k} F'_{y_i} \Delta_y W^{(\omega)}\|_{H^0} &\leq \varepsilon (\|W\|_{H^2} + \|\nabla Q\|_{H^0}) \\ &\leq \varepsilon \gamma_{10} [\|W_1\|_{H^2} + \|\nabla Q\|_{H^0} + \|V\|_{L_2}] . \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que dans O_j , $|\nabla F|$ est borné par une quantité d'ordre ε fixé (aussi petit qu'on veut)). Grâce à (3,12), (3,14) et (3,17), on peut extraire (W_1, Q) de (3,15). En effet, le second membre est contractant* par rapport à (W_1, Q) dans $H^2 \times H^1$ et l'on a

$$\|W_1\|_{H^2} + \|\nabla Q\|_{H^0} \leq \gamma_5 \gamma_6 \|V\|_{L_2} + \varepsilon \gamma_6 \gamma_{10} [\|W_1\|_{H^2} + \|\nabla Q\|_{H^0} + \|V\|_{L_2}] ,$$

d'où l'on tire, en supposant ε choisi tel que $\varepsilon = (2 \gamma_6 \gamma_{10})^{-1}$,

$$(3,18) \quad \|W_1\|_{H^2} + \|\nabla Q\|_{H^0} \leq (2 \gamma_5 \gamma_6 + 1) \|V\|_{L_2} .$$

Notons que le choix de ε fixe le choix du recouvrement O_j . Il résulte de (3,18) et la définition de W_1 , qu'il existe une constante γ_{11} telle que

$$\|\alpha_j U\|_{W_2^2} + \|\nabla(\alpha_j q)\|_{W_2^0} \leq \gamma_{11} \|V\|_{L_2} ,$$

et en sommant sur tous les $O_j \cap \bar{\Omega}$ (en nombre fini), tout en tenant compte de (3,6), on obtient :

$$(3,19) \quad \|\cup\|_{H_2 \cap W} + \|\nabla q\|_{L_2} \leq \gamma_{12} \|V\|_{L_2} .$$

Pour obtenir des estimations plus précises, dans le cas où $V \in H_m(\Omega)$, $m > 0$, il suffit alors de remarquer que le système (3,1) est « elliptique » au sens de **S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg** (simple exercice) [13] et d'appliquer les résultats relatifs aux estimations à la frontière (Chap. IV de [13]) pour affirmer qu'il existe une solution unique $(U, \nabla q)$ du système (3,1), telle que

$$U \in H_{m+2}(\Omega) \cap W , \quad \nabla q \in H_m(\Omega) \cap G_0(\Omega)$$

et que l'on a l'estimation

$$(3,20) \quad \|\cup\|_{H_{m+2} \cap W} + \|\nabla q\|_{H_m} \leq \gamma_{13} \|V\|_{H_m} ,$$

pour une certaine constante γ_{13} indépendante de V , mais dépendant de Ω et de m .

II,3.4. L'opérateur $\mathcal{E}$

Nous venons donc de montrer l'existence d'un opérateur $\mathcal{E}$ continu de $H_m(\Omega)$ dans $H_{m+2}(\Omega) \cap W$ ($m \geq 0$) tel que $U = \mathcal{E}V$ soit solution de (4,1). Cherchons son noyau : soit V tel que $\mathcal{E}V = 0$. Alors, par définition de $\mathcal{E}$, $(V, W)_{L_2} = 0 \quad \forall W \in \mathcal{W}$. Or $\mathcal{W}$ est dense dans $\dot{J}(\Omega)$, d'où $V \in G_0(\Omega)$. Le noyau de $\mathcal{E}$ est donc

* On considère W_0 exprimé au moyen de W_1 dans le deuxième terme du second membre de (3,15) :

$$W_0 = (0, \dots, 0, F'_{y_i} W_1^{(\omega)}) .$$

$G_0(\Omega)$, et l'on peut résumer ce fait par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathring{J}(\Omega) & \xrightleftharpoons[\pi_0 \Delta]{\mathcal{C}} & H_2(\Omega) \cap \mathcal{W} \\ H_m(\Omega) \cap \mathcal{W} & \xrightleftharpoons[\pi_0 \Delta]{\mathcal{C}} & \mathcal{C}[H_m(\Omega) \cap \mathcal{W}] \subset H_{m+2}(\Omega) \cap \mathcal{W} \\ H_m(\Omega) \cap \mathring{J}(\Omega) & \xrightleftharpoons[\pi_0 \Delta]{\mathcal{C}} & H_{m+2}(\Omega) \cap \mathcal{W} \end{array}$$

où l'on note que $\pi_0 \Delta U = \mathcal{C}^{-1} U$ si l'on se restreint à $H_m(\Omega) \cap \mathring{J}(\Omega)$. Profitons de ce que nous savons sur $\mathcal{C}$ pour préciser le produit scalaire que nous prendrons dorénavant dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$. D'après (3,20), on a

$$(3,21) \quad \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma_{13} \|\pi_0 \Delta U\|_{\mathring{J}} \leq \gamma_{13} \|\Delta U\|_{L_2} \leq \gamma_{13} \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}.$$

Il en résulte immédiatement que l'on peut choisir dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ la norme $U \rightarrow \|\pi_0 \Delta U\|_{\mathring{J}}$, équivalente à la précédente (qui était celle de $W_2^2(\Omega)$). Le produit scalaire dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ est alors :

$$(3,22) \quad (U, V)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = (\pi_0 \Delta U, \pi_0 \Delta V)_{\mathring{J}}.$$

II,4. ÉQUATIONS CLASSIQUES

Nous allons introduire un système d'équations suffisamment général pour englober un certain nombre de cas particuliers, les plus fréquemment traités par les différents auteurs.

II,4.1. Écoulement dans une enceinte fermée

S'il n'y a pas de phénomène thermique, ni électromagnétique, on a en général le système suivant, qui régit le mouvement du fluide incompressible situé dans un domaine borné Ω :

$$(4,1) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V + \nabla p = \nu \Delta V, \\ \nabla \cdot V = 0, \quad (\nu = \text{viscosité cinématique}) \end{cases}$$

avec en plus certaines conditions aux limites stationnaires. Soit alors V_0 une solution stationnaire de (4,1) (écoulement de base) et posons $V = V_0 + U$; le système satisfait par U devient :

$$(4,2) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \nu \Delta U - U \cdot \nabla V_0 - V_0 \cdot \nabla U - U \cdot \nabla U - \nabla p, \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases}$$

avec $U|_{\partial\Omega} = 0$. Il se pose alors le problème suivant : soit $U(0) = U_0$ une certaine perturbation initiale, que devient $U(t)$ quand $t \rightarrow \infty$? Pour cela il faut d'abord savoir si U existe dans un certain sens, ensuite il faut étudier son comportement quand $t \rightarrow \infty$. Si $U(t)$ reste borné par une quantité arbitrairement petite (dépendant de U_0) c'est que V_0 est stable, si $U(t)$ ne peut être maintenu aussi petit que l'on veut sur $(0, \infty)$, alors V_0 est instable et se pose le problème de savoir s'il n'y a pas une autre solution stationnaire stable, où si l'écoulement tend vers une structure périodique dans le temps.

II,4.2. Problème de Couette-Taylor

C'est le problème de l'écoulement d'un fluide incompressible entre deux cylindres concentriques en rotations uniformes. Selon les écoulements envisagés, on peut considérer deux sortes de domaines de périodicité : le cas axisymétrique (indépendant de Θ) et le cas non-axisymétrique (Fig. 4).

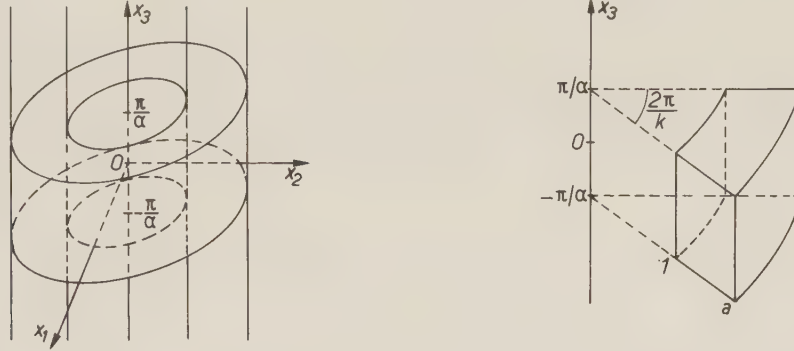


Fig. 4 • cas axisymétrique : $\Omega = \{(r, x_3) ; r \in [1, a], x_3 \in [-\pi/\alpha, \pi/\alpha]\}$

cas non-axisymétrique : $\Omega = \{(r, \theta, x_3) ; r \in [1, a], x_3 \in [-\pi/\alpha, \pi/\alpha], \theta \in [-\pi/k, \pi/k]\}, k \in \mathbb{N}$.

Ici, l'écoulement de base est représenté par la solution de Couette : $V_0 = (0, -Ar(1+Br^{-2}), 0)$ si l'on repère les vitesses par rapport au système tournant (coordonnées semi-polaires). A et B sont déterminés par les vitesses de rotation des cylindres intérieur et extérieur, ainsi que leurs rayons. La perturbation U doit alors satisfaire le système d'équations non-dimensionnalisées :

$$(4,3) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = R^{-1} \Delta U - V_0 \cdot \nabla U - U \cdot \nabla V_0 - U \cdot \nabla U - \nabla p, \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases}$$

où R est le nombre de Reynolds, basé par exemple sur les quantités relatives au cylindre intérieur ($R = R_1^2 \omega_1 \nu^{-1}$). Ici les conditions aux limites sont $U=0$ pour $r=1$ et a et des conditions de périodicité par rapport à x_3 et éventuellement par rapport à Θ .

II,4.3. Problème de Bénard

Le lecteur est renvoyé au chapitre IX pour ce problème, où il est établi que les équations le régissant sont :

$$(4,4) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta \mathcal{R}_0^{-1} U + B_0 U - \nabla p - U^{(3)} \cdot \nabla U, \\ \nabla \cdot U^{(3)} = 0 \end{cases}$$

où l'on rappelle que $U^{(3)} = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$, et où l'on note $\mathcal{R}_0^{-1} U = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, Pr^{-1} u^{(4)})$, $B_0 U = (0, 0, (Ra)^{1/2} u^{(4)}, Pr^{-1} (Ra)^{1/2} u^{(3)})$ Pr et Ra étant respectivement les nombres de Prandtl et de Rayleigh. Ici, les conditions aux limites sont $U=0$ en $x_3=0$ et $x_3=1$, et des conditions de périodicité par rapport à x_1 et x_2 . On peut choisir un domaine de périodicité sous la forme de prisme droit à section carrée, rectangulaire, triangulaire équilatérale, hexagonale, ou même si l'on suppose que l'écoulement ne dépend pas de x_1 ou x_2 on peut considérer une structure en «rouleaux» (cylindres infinis à section rectangulaire). Au chapitre IX nous étudions en détail la structure hexagonale (la plus compliquée en principe).

II,4.4. Système « général »

La comparaison entre les systèmes (4,2), (4,3), (4,4) conduit à considérer le système suivant, où $U = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$:

$$(4,5) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta \mathcal{R}^{-1} U - (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) - C_0 U^{(p)} \cdot \nabla U - \nabla p, \\ \nabla \cdot U^{(p)} = 0, \end{cases}$$

Dans (4,5), $\mathcal{R}$ est un opérateur diagonal à coefficients constants positifs tel que

$$U = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) \rightarrow \mathcal{R}U = (R u^{(1)}, \dots, R u^{(p)}, R_1 u^{(p+1)}, \dots, R_{n-p} u^{(n)}),$$

il peut être représenté dans $\mathbb{C}^n$ par une matrice diagonale dont les p premiers termes sont égaux. Sur les exemples traités on voit la signification de R et des R_i , tous paramètres apparaissant éventuellement dans le problème considéré (dans le cas du § II,4.3 on a $R=1$ et $R_i = Pr$).

Le terme linéaire $V_0 \cdot \nabla U + B_0 U$ est tel que V_0 est dans $\underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$ à p premières composantes solénoïdales, les $n-p$ autres étant nulles, et tel que sur $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ ($\partial\Omega$ dans le cas (i)) sa composante normale soit nulle. B_0 est un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^n$ à coefficients dans $\underline{C}^\infty(\bar{\Omega})$ (scalaire). En fait nous n'aurons besoin que du fait que B_0 est borné dans $H_m(\Omega) \cap H(\Omega)$, $m \geq 1$, et dans $L_2(\Omega)$. Le terme $C_0 U^{(p)} \cdot \nabla U$ représente la structure non linéaire du système. Les p premières composantes sont $U^{(p)} \cdot \nabla U^{(p)}$ les $n-p$ autres sont de la forme $C_1 U^{(p)} \cdot \nabla U^{(n-p)}$ si l'on note $U^{(n-p)}$ le vecteur formé des $n-p$ dernières composantes de U , et C_1 est un opérateur linéaire dans $\mathbb{C}^{n-p}$, à coefficients constants. Dans $\mathbb{C}^n$, on peut représenter C_0 sous la forme matricielle :

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & & & C_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \text{ lignes} \\ n-p \text{ lignes} \end{matrix}.$$

Pour les exemples cités plus haut, C_0 n'est autre que l'identité dans $\mathbb{C}^n$.

C'est le système (4,5) que nous allons transformer, puis résoudre.

III. PROBLÈME LINÉAIRE SIMPLE

III,1. LES OPÉRATEURS $\mathcal{G}$ ET H

III,1.1. Généralités

Nous entendons par "problème linéaire simple", la résolution du système suivant :

$$(1,1) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta \mathcal{R}^{-1} U - \nabla p + f, \\ \nabla \cdot U^{(p)} = 0, \\ U(0) = 0, \end{cases}$$

et U vérifie $U|_{\partial\Omega} = 0$ dans le cas (i), ou $U|_{\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1} = 0$ et des conditions de périodicité (Ω) dans le cas (ii). Le système (1,1) provient de (II,4,5) après y avoir supprimé le terme non linéaire, le terme linéaire $(V_0 \cdot \nabla U + B_0 U)$, et rajouté f . Notons que le problème (1,1) a été étudié dans [6] p. 75-94, mais la méthode utilisée n'est d'aucune utilité pour l'étude du problème non linéaire et c'est pourquoi nous procéderons autrement.

Nous préciserons plus loin dans quels espaces sont choisis U_0 et f pour la résolution de (1,1).

III,1.2. Définitions de $\mathcal{E}$ et H

Nous avons défini au § II,3 l'opérateur $\mathcal{E}$ continu et inversible de $H_m(\Omega) \cap \dot{J}(\Omega)$ sur $H_{m+2}(\Omega) \cap \mathcal{W}$, mais la considération du problème (1,1) nous amène à définir les opérateurs

$$(1,2) \quad \mathcal{E} = \mathcal{R}\mathcal{E} \quad , \quad H = \mathcal{E}^{-1} \quad .$$

Le domaine de définition, dans les différents espaces, de l'opérateur H est noté $\mathcal{D}_m(H)$, $m \geq 0$. Pour $m=0$, on a $\mathcal{D}_0(H) = \mathcal{E}\{\dot{J}(\Omega)\} = H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$; pour $m \geq 1$ on a $\mathcal{D}_m(H) = \mathcal{E}\{H_m \cap \mathcal{W}\} \subset H_{m+2} \cap \mathcal{W}$.

Enfin, notons que, de par la structure des différents opérateurs, on a d'abord $\mathcal{R}\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{R}$ puis, $\forall U \in \mathcal{D}_m(H)$ on a

$$HU = \Pi_0 \Delta \mathcal{R}^{-1} U = \mathcal{R}^{-1} \Pi_0 \Delta U \quad ,$$

dans $H_m \cap \mathcal{W}$ pour $m \geq 1$ (resp. dans $\dot{J}(\Omega)$ pour $m=0$) .

III,1.3. Propriétés de $\mathcal{E}$ et H

Remarquons que $\mathcal{R}$ est autoadjoint dans $\dot{J}, \mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$, il en résulte que l'on peut écrire les identités :

$$(1,3) \quad \forall U, V \in \dot{J}(\Omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{E}U, V)_{\dot{J}} = -(\overline{\mathcal{E}V}, \overline{\mathcal{E}U})_{\mathcal{W}} = -(\mathcal{R}\mathcal{E}U, \mathcal{E}V)_{\mathcal{W}} \quad , \\ (U, \mathcal{E}V)_{\dot{J}} = -(\overline{\mathcal{E}U}, \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}V})_{\mathcal{W}} = -(\mathcal{R}\mathcal{E}U, \mathcal{E}V)_{\mathcal{W}} . \end{array} \right.$$

$$(1,4) \quad \forall U, V \in \mathcal{W} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{E}U, V)_{\mathcal{W}} = (\mathcal{E}U, \mathcal{R}V)_{\mathcal{W}} = -(U, \mathcal{R}V)_{\dot{J}} \quad , \\ (U, \mathcal{E}V)_{\mathcal{W}} = (\overline{\mathcal{E}V}, \overline{U})_{\mathcal{W}} = -(\overline{V}, \overline{\mathcal{R}U})_{\dot{J}} = -(U, \mathcal{R}V)_{\dot{J}} . \end{array} \right.$$

$$(1,5) \quad \forall U, V \in H_2(\Omega) \cap \mathcal{W} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{E}U, V)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = (\Pi_0 \Delta \mathcal{E}U, \Pi_0 \Delta V)_{\dot{J}} = (\mathcal{R}U, \Pi_0 \Delta V)_{\dot{J}} \\ \quad \quad \quad = (\mathcal{R}U, \Delta V)_{L_2} = -(\mathcal{R}U, V)_{\mathcal{W}} \quad , \\ (U, \mathcal{E}V)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = (\overline{\mathcal{E}V}, \overline{U})_{H_2 \cap \mathcal{W}} = -(\overline{\mathcal{R}V}, \overline{U})_{\mathcal{W}} = -(\mathcal{R}U, V)_{\mathcal{W}} . \end{array} \right.$$

D'où, l'opérateur $\mathcal{E}$ est autoadjoint dans les espaces $\dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$. Or, dans ces trois espaces $H = \mathcal{E}^{-1}$ existe et l'on peut appliquer le résultat de [8] p. 309 qui montre que l'opérateur H est lui aussi autoadjoint dans les espaces $\dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, c'est-à-dire, en particulier que $\mathcal{D}_0(H)$ est dense dans $\dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{D}_m(H)$ est dense dans $H_m \cap \mathcal{W}$ ($m=1,2$), que de plus H est fermé et symétrique dans ces espaces.

Notons enfin l'aspect dissipatif de H (en utilisant (1,3), (1,4), (1,5))

$$(1,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall U \in \mathcal{D}_0(H) \quad , \quad (HU, U)_{\dot{J}} = -(\mathcal{R}^{-1}U, U)_{\mathcal{W}} \quad , \\ \forall U \in \mathcal{D}_1(H) \quad , \quad (HU, U)_{\mathcal{W}} = -(\mathcal{R}^{-1} \Pi_0 \Delta U, \Pi_0 \Delta U)_{\dot{J}} = -(\mathcal{R}^{-1}U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} \quad , \\ \forall U \in \mathcal{D}_2(H) \quad , \quad (HU, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = -(\mathcal{R}^{-1} \Pi_0 \Delta U, \Pi_0 \Delta U)_{\mathcal{W}} . \end{array} \right.$$

La norme de l'opérateur $\mathcal{R}$ est évidemment : $\|\mathcal{R}\| = \sup \{R, R_1, \dots, R_{n-p}\}$ et il en résulte $(\mathcal{R}^{-1}U, U) \geq \|\mathcal{R}\|^{-1}(U, U)$ dans les espaces considérés. Puis, utilisant l'inégalité (II,1,3) et le fait que l'injection canonique de $H_2 \cap \mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$ est continue de norme K (on modifie au besoin K dans (II,1,3)) on a :

$$(1,7) \quad \begin{cases} \forall U \in \mathcal{D}_0(H) & \|U\|_{\dot{J}} \leq K \|U\|_{\mathcal{W}}, \\ \forall U \in \mathcal{D}_1(H) & \|U\|_{\mathcal{W}} \leq K \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \\ \forall U \in \mathcal{D}_2(H) & \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq K \|\Pi_0 \Delta U\|_{\mathcal{W}} \quad \text{car } \Pi_0 \Delta U \in \mathcal{W}. \end{cases}$$

De (1,6) et (1,7) il résulte :

$$(1,8) \quad \forall U \in \mathcal{D}_m(H) \quad (HU, U) \leq -K^{-2} \|\mathcal{R}\|^{-1} \|U\|^2,$$

pour $m = 0, 1, 2$, le produit scalaire et la norme étant pris respectivement dans $\dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$.

III,2. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA RÉSOVANTE DE H

III,2.1. Propriétés résultant du fait que H est autoadjoint

Rappelons que la résolvante de H est définie par (quand elle existe)

$$R(\zeta; H) = (\zeta \mathbf{1} - H)^{-1}$$

où $\mathbf{1}$ est l'application identique et $\zeta \in \mathbb{C}$. Du fait que H soit autoadjoint dans $\dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, il résulte d'après [1] p. 184 (ou [2] p. 1192) que l'on a, si $\Im m \zeta \neq 0$,

$$(2,1) \quad \|R(\zeta; H)\| \leq |\Im m \zeta|^{-1}$$

avec la norme des opérateurs de $\mathcal{L}(\dot{J})$, $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ ou $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. D'autre part, on a l'identité ($\Im m \zeta \neq 0$)

$$(2,2) \quad R(\zeta; H) = -\zeta^{-1} \mathcal{Q}_f R(\zeta^{-1}; \mathcal{Q}_f)$$

et, de la même manière que précédemment, si $\Im m \zeta \neq 0$,

$$(2,3) \quad \|R(\zeta^{-1}; \mathcal{Q}_f)\| \leq |\Im m \zeta^{-1}|^{-1} = |\zeta|^2 |\Im m \zeta|^{-1}.$$

Or, grâce à (II,3,20), on sait qu'il existe une constante C telle que $\|\mathcal{Q}_f\| \leq C$ où la norme est prise dans $\mathcal{L}(\dot{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$, $\mathcal{L}(\mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})$ ou $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_4 \cap \mathcal{W})$. Il vient alors, d'après (2,2) et (2,3), si $\Im m \zeta \neq 0$

$$(2,4) \quad \begin{cases} \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(\dot{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq C |\zeta| |\Im m \zeta|^{-1}, \\ \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(H_m \cap \mathcal{W}, H_{m+2} \cap \mathcal{W})} \leq C |\zeta| |\Im m \zeta|^{-1}, \quad m = 1, 2. \end{cases}$$

Pour compléter ces estimations, remarquons que grâce aux inégalités d'interpolation, que l'on peut trouver par exemple dans [1] au chapitre 3, on obtient d'après (2,1) et (2,4) :

$$(2,5) \quad \begin{cases} \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(\dot{J}, \mathcal{W})} \leq C_1 |\zeta|^{1/2} |\Im m \zeta|^{-1}, \\ \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq C_1 |\zeta|^{1/2} |\Im m \zeta|^{-1}, \\ \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})} \leq C_1 |\zeta|^{1/2} |\Im m \zeta|^{-1}, \end{cases}$$

pour une certaine constance C_1 , indépendante de ζ tel que $\Im m \zeta \neq 0$.

III,2.2. Propriétés résultant de la dissipativité de H

Les opérateurs H et $\mathcal{Q}_f$ étant autoadjoints, leurs spectres sont réels et l'identité (2,2) montre que le spectre $\sigma(\mathcal{Q}_f)$ correspond au spectre $\sigma(H)$ par la transformation $\zeta \leftrightarrow \zeta^{-1}$. D'autre part, $\mathcal{Q}_f$ est compact dans $\dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, grâce à la compacité de l'injection canonique $\mathcal{W} \rightarrow \dot{J}$ ou $H_2 \cap \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ ou $H_3 \cap \mathcal{W} \rightarrow H_2 \cap \mathcal{W}$. Les spectres $\sigma_m(\mathcal{Q}_f)$ sont donc discrets et formés uniquement de valeurs propres. Montrons

que $\forall m > 0 \quad \sigma_m(\mathcal{G}) = \sigma_0(\mathcal{G})$. Soit $\lambda \in \sigma_0(\mathcal{G})$, alors $\exists U \in \mathring{J}(\Omega)$ tel que $\lambda U = \mathcal{G}U$, d'où $U \in H_2 \cap \mathcal{W}$ et de proche en proche $U \in H_m \cap \mathcal{W} \quad \forall m > 0$, c'est-à-dire que $\lambda \in \sigma_m(\mathcal{G}) \quad \forall m$. Réciproquement, $\lambda \in \sigma_m(\mathcal{G}) \Rightarrow \lambda \in \sigma_0(\mathcal{G})$ est évident. Il en résulte que le spectre $\sigma(H)$ est indépendant de l'espace choisi $(\mathring{J}, \mathcal{W} \text{ ou } H_2 \cap \mathcal{W})$, qu'il est discret et formé de valeurs propres. Alors, (1,8) montre immédiatement que $\forall \lambda \in \sigma(H) \quad , \quad \lambda \leq -K^{-2} \|R\|^{-1}$.

Supposons donc ζ tel que $\operatorname{Re} \zeta > -K^{-2} \|R\|^{-1}$; d'après (1,8) on a $\forall U \in \mathcal{D}_m(H) \quad , \quad m = 0, 1, 2$,

$$\operatorname{Re}((\zeta 1 - H)U, U) \geq (\operatorname{Re} \zeta + K^{-2} \|R\|^{-1}) \|U\|^2,$$

c'est-à-dire immédiatement

$$(2,6) \quad \forall \zeta \text{ tel que } \operatorname{Re} \zeta > -K^{-2} \|R\|^{-1}, \quad \|R(\zeta, H)\| \leq (\operatorname{Re} \zeta + K^{-2} \|R\|^{-1})^{-1},$$

la norme étant prise dans $\mathcal{L}(\mathring{J})$, $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ ou $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$.

III,3. ESTIMATION FONDAMENTALE POUR LA RÉSOVANTE DE H

III,3.1. Position du problème

Notons* $H_1^0(\Omega) \cap \mathring{J}(\Omega) = \{U; U^{(p)} \in H_1(\Omega) \cap \mathring{J}(\Omega), U^{(n-p)} \in H(\Omega)\}$, où $U^{(p)} = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}, 0, \dots, 0)$ et $U^{(n-p)} = (0, \dots, 0, u^{(p+1)}, \dots, u^{(n)})$, et munissons cet espace d'une structure hilbertienne avec la norme de $H_1(\Omega)$. Remarquons que si l'on applique l'opérateur Π_0 à $U \in H(\Omega)$, on a $\Pi_0 U \in H_1^0 \cap \mathring{J}$ tandis que si $U \in H_1(\Omega)$ alors $\Pi_0 U \notin H_1^0 \cap \mathring{J}$ (en général).

Dans ce paragraphe il s'agit d'estimer $R(\zeta, H)$ dans $\mathcal{L}(H_1^0 \cap \mathring{J}, \mathcal{W})$ et $\mathcal{L}(H_1^0 \cap \mathring{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$ d'une «meilleure manière» qu'en prenant la norme dans $\mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W})$ ou $\mathcal{L}(\mathring{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$ comme dans (2,5). Nous verrons l'utilité de cette estimation dans le § suivant et surtout lors de l'étude du problème non linéaire au chapitre V. Nous ferons la démonstration dans le cas (i), les modifications à faire pour traiter le cas (ii) sont évidentes et n'apporteraient que des lourdeurs dans nos calculs. Dans ce cas, estimer $V = R(\zeta, H)U$, revient à estimer la solution du problème suivant :

$$(3,1) \quad \begin{cases} R^{-1} \Delta v^{(i)} - \zeta v^{(i)} - \partial_i q = u^{(i)}, & i = 1, \dots, p, \\ R_k^{-1} \Delta v^{(p+k)} - \zeta v^{(p+k)} = u^{(p+k)}, & k = 1, \dots, n-p, \\ \nabla \cdot V^{(p)} = 0, \\ V|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

et nous supposons que $U \in H_1^0 \cap \mathring{J}$.

III,3.2. Réduction du problème (3,1)

Remarquons que d'après le §III,2 nous savons déjà que si $\Im m \zeta \neq 0$ il existe une solution unique $(V, \nabla q)$ de (3,1), qui vérifie l'estimation

$$(3,2) \quad \|V\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} + |\zeta|^{1/2} \|V\|_{\mathcal{W}} + |\zeta| \|V\|_{\mathring{J}} + \|\nabla q\|_{L_2} \leq \gamma |\zeta| |\Im m \zeta|^{-1} \|U\|_{\mathring{J}}.$$

En effet, la seule chose à montrer est l'estimation concernant ∇q , or si l'on fait le produit scalaire des deux membres de (3,1) avec ∇q dans $L_2(\Omega)$, et qu'on remarque que U et $V \in \mathring{J}(\Omega)$, alors on a immédiatement

$$\|\nabla q\|_{L_2} \leq R^{-1} \|\Delta V\|_{L_2},$$

ce qui est suffisant pour montrer (3,2).

* On a une définition analogue pour $H_m^0(\Omega) \cap \mathring{J}(\Omega)$, $m > 1$.

De plus, d'après la forme de (3,1) on peut écrire $V = V^{(p)} + V^{(n-p)}$ avec $V^{(n-p)} = R(\zeta; H) U^{(n-p)}$.

Or $U^{(n-p)} \in \mathcal{W}$ est immédiat à vérifier, il en résulte que d'après (2,1), (2,4) et (2,5) on a l'estimation suivante, $\forall \zeta$ tel que $\Im \zeta \neq 0$ ($\gamma = c_{\underline{e}}$):

$$(3,3) \quad \|V^{(n-p)}\|_{H_3 \cap \mathcal{W}} + |\zeta|^{1/2} \|V^{(n-p)}\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} + |\zeta| \|V^{(n-p)}\|_{\mathcal{W}} \leq \gamma |\zeta| |\Im \zeta|^{-1} \|U^{(n-p)}\|_{\mathcal{W}}.$$

Dans toute la suite nous noterons γ toute constante intervenant dans les calculs, dont la valeur importe peu, dans les cas où il n'y a pas d'ambiguïté (en particulier $36\gamma = \gamma$, $\gamma_1 \gamma_2 = \gamma$, ...).

Pour estimer V , il ne reste plus qu'à estimer $V^{(p)} = R(\zeta; H) U^{(p)}$; pour cela nous allons changer les notations jusqu'à la fin de ce paragraphe : on note $V = V^{(p)}$, $R^{-1} = \mathcal{V}$ et le problème devient :

$$(3,4) \quad \begin{cases} \nu \Delta V - \zeta V - \nabla q = U, \\ \nabla \cdot V = 0, \\ V|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases}$$

mais avec $V = (v^{(1)}, \dots, v^{(p)})$ et $U = U^{(p)} \in H_1(\Omega) \cap \tilde{J}(\Omega)$ (p composantes).

III,3.3. Problème intérieur

Utilisons les mêmes notations qu'au § II,3.3 et soit une partition de l'unité $\{\alpha_j; j = 0, \dots, M\}$ telle que $\alpha_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ à support compact dans $O_0 \subset \subset \Omega$ tel que $\bigcup_{j=0}^M O_j$ recouvre Ω . Cherchons à estimer, en premier lieu, $\alpha_0 V$ qui, de par sa structure est à support compact dans Ω . Notons

$$\begin{cases} \bar{f}_0 = \alpha_0 U - q \nabla \alpha_0 + 2\nu \nabla \alpha_0 \cdot \nabla V + \nu V \cdot \Delta \alpha_0, & \bar{f}_0 \in H(\Omega), \\ g_0 = V \cdot \nabla \alpha_0, & W = \alpha_0 V, \quad Q = \alpha_0 q, \quad g_0 \in H_2(\Omega) \text{ (scalaire)}. \end{cases}$$

Le problème (3,4) devient :

$$(3,5) \quad \begin{cases} \nu \Delta W - \zeta W - \nabla Q = \bar{f}_0, \\ \nabla \cdot W = g_0, \\ W|_{\partial \Omega} = 0, \quad Q|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases}$$

et, d'après leurs formes, les seconds membres vérifient l'estimation :

$$(3,6) \quad \|\bar{f}_0\|_H + \|g_0\|_{H_2} + |\zeta|^{1/2} \|g_0\|_H + |\zeta| \|g_0\|_{L_2} \leq \gamma (1 + |\zeta|) |\Im \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1},$$

pour $\Im \zeta \neq 0$. Prenons la divergence de la première équation de (3,5) :

$$(3,7) \quad \begin{cases} \Delta Q = \nu \Delta g_0 - \zeta g_0 - \nabla \cdot \bar{f}_0, \\ Q|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases}$$

le second membre vérifie, pour $\Im \zeta \neq 0$,

$$\|\nu \Delta g_0 - \zeta g_0 - \nabla \cdot \bar{f}_0\|_{L_2} \leq \gamma (1 + |\zeta|) |\Im \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1},$$

et nous sommes ramené à un problème de Dirichlet classique dont on sait qu'il admet une solution unique dans

$H_2(\Omega)$ (scalaire) telle que : $\|Q\|_{H_2} \leq \gamma (1 + |\zeta|) |\Im \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1}$. Reportons Q dans le premier membre de (3,5), nous obtenons l'équation en W :

$$(3,8) \quad \begin{cases} \nu \Delta W - \zeta W = \bar{f}', \\ W|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases}$$

avec $\bar{f}' = \bar{f}_0 + \nabla Q \in H(\Omega)$ par construction et l'estimation $\|\bar{f}'\|_H \leq \gamma(1+|\zeta|)|\Im \zeta|^{-1}\|U\|_{H_1}$.

Le problème (3,8) est alors elliptique au sens classique et, pour le résoudre dans $H(\Omega)$, il convient de remarquer que $\nu \Delta$ peut être considéré comme l'inverse de l'opérateur qui résout (3,8) avec $\zeta=0$, opérateur continu de $H(\Omega)$ dans $H_3(\Omega) \cap H(\Omega)$ et autoadjoint dans $H(\Omega)$. Il en résulte immédiatement que $\nu \Delta$ est autoadjoint dans $H(\Omega)$ de domaine inclus dans $H_3(\Omega) \cap H(\Omega)$ et, de la même manière que l'on a obtenu (3,2), on a pour $\Im \zeta \neq 0$:

$$(3,9) \quad \|W\|_{H_1 \cap H} + |\zeta|^{1/2} \|W\|_{H_2 \cap H} + |\zeta| \|W\|_H \leq \gamma |\zeta| |\Im \zeta|^{-1} \|\bar{f}'\|_H.$$

Finalement, le « problème intérieur » (3,5) admet la solution unique $(\alpha_0 V, \alpha_0 Q)$, et celle-ci vérifie pour $\Im \zeta \neq 0$

$$(3,10) \quad \|\alpha_0 V\|_{H_3 \cap H} + |\zeta|^{1/2} \|\alpha_0 V\|_{H_2 \cap H} + |\zeta| \|\alpha_0 V\|_H + \|\alpha_0 Q\|_{H_2} \leq \gamma(1+|\zeta|)(1+|\zeta| |\Im \zeta|^{-1}) |\Im \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1}.$$

III,3.4. Estimation à la frontière

De la même manière qu'au § II,3.3 et avec les mêmes notations on obtient le système analogue à (II,3,9), en variables y_i :

$$(3,11) \quad \begin{cases} \nu \Delta_y W - \zeta W - \nabla_y Q = \bar{f} + 2\nu F'_{y_i} \partial_{y_i y_r}^2 W - \nu F'_{y_i} F'_{y_i} \partial_{y_r}^2 W + \nu F''_{y_i y_i} \partial_{y_r} W - \partial_{y_r} Q \cdot \nabla_y F \\ \quad = \bar{f} + L'(W, Q), \\ \nabla_y \cdot W = g + F'_{y_i} \partial_{y_r} W^{(i)}, \\ W = 0 \text{ pour } y_r = 0 \text{ et } y_r \geq 1, \end{cases}$$

et ce système doit être vérifié pour $y_r > 0$. On a de plus, a priori, l'estimation (pour $\Im \zeta \neq 0$) :

$$(3,12) \quad \|\bar{f}\|_{H_1} + \|g\|_{H_2} + |\zeta|^{1/2} \|g\|_{H_1} + |\zeta| \|g\|_{L_2} \leq \gamma(1+|\zeta|) |\Im \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1}.$$

Afin d'estimer les dérivées partielles de W et Q nous allons d'abord étudier les dérivées par rapport à $y_1, \dots, y_{p-1}$. Pour cela, dérivons (3,11) par rapport à y_k ($k=1, \dots, p-1$) et posons $W_k = \partial_{y_k} W$, $Q_k = \partial_{y_k} Q$; le système devient alors :

$$(3,13) \quad \begin{cases} \nu \Delta_y W_k - \zeta W_k - \nabla_y Q_k = \partial_{y_k} \bar{f} + L'(W_k, Q_k) + 2\nu F''_{y_i y_k} \partial_{y_i y_r}^2 W - 2\nu F'_{y_i} F''_{y_i y_k} \partial_{y_r}^2 W \\ \quad + \nu F^{(3)}_{y_i y_i y_k} \partial_{y_r} W - \nabla_y \partial_{y_r} F \cdot \partial_{y_k} Q, \\ \nabla_y \cdot W_k = \partial_{y_k} g + F'_{y_i} \partial_{y_r} W_k^{(i)} + F''_{y_i y_k} \partial_{y_r} W^{(i)}, \\ W_k = 0 \text{ en } y_r = 0 \text{ et } y_r \geq 1. \end{cases}$$

La forme (3,13) suggère de se ramener aux variables x_i , car alors la condition sur $\partial\Omega$ est conservée :

$$(3,14) \quad \begin{cases} \nu \Delta_x W_k - \zeta W_k - \nabla_x Q_k = L'_1(\bar{f}, W, Q), \\ \nabla_x \cdot W_k = \partial_{x_k} g + F'_{x_k} \partial_{x_r} g + F''_{x_i x_k} \partial_{x_r} W^{(i)}, \\ W_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

où $L'_1(\bar{f}, W, Q) = \partial_{y_k} \bar{f} + 2\nu F''_{y_i y_k} \partial_{y_i y_r}^2 W - 2\nu F'_{y_i} F''_{y_i y_k} \partial_{y_r}^2 W + \nu F^{(3)}_{y_i y_i y_k} \partial_{y_r} W - \nabla_y \partial_{y_r} F \cdot \partial_{y_k} Q$,

exprimé en variables $\{x_i\}$. Remarquons que si l'on pose

$$W_0 = (g \partial_{x_1}^k, \dots, g \partial_{x_{p-1}}^k, g F'_{x_k} + W^{(i)} F''_{x_i x_k}) ,$$

alors $\nabla_x \cdot (W_k - W_0) = 0$ (δ_{ij} étant le symbole de Kronecker). Notant alors $W'_k = W_k - W_0$, le système satisfait par W'_k s'écrit :

$$(3,15) \quad \begin{cases} \nu \Delta_x W'_k - \zeta W'_k - \nabla_x Q_k = L'_1(\bar{f}, W, Q) - \nu \Delta_x W_0 - \zeta W_0, \\ \nabla_x \cdot W'_k = 0, \\ W'_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

car $W_0|_{\partial\Omega} = 0$ puisque $g|_{\partial\Omega} = 0$ et $W|_{\partial\Omega} = 0$.

Exprimons le second membre de (3,15) au moyen de U et ζ :

$$L'_1(\bar{f}, W, Q) - \nu \Delta_x W_0 - \zeta W_0 = L'_2(U, \zeta),$$

on a alors l'estimation, (d'après (3,12) et (3,2)) pour $\Im m \zeta \neq 0$,

$$(3,16) \quad \|L'_2(U, \zeta)\|_{L_2} \leq \gamma(1+|\zeta|)^2 |\zeta|^{-1} |\Im m \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1}.$$

C'est alors qu'on est ramené à la constatation que

$$W'_k = R(\zeta, H) [\Pi_0 L'_2(U, \zeta)]$$

par définition de $R(\zeta, H)$ dans $\tilde{J}(\Omega)$. Il en résulte, d'après (3,2) que si $\Im m \zeta \neq 0$, on a pour $k=1, \dots, p-1$,

$$\|W'_k\|_{H_2 \cap W} + |\zeta|^{1/2} \|W'_k\|_W + |\zeta| \|W'_k\|_{L_2} + \|\nabla Q_k\|_{L_2} \leq \gamma(1+|\zeta|)^2 |\Im m \zeta|^{-2} \|U\|_{H_1}.$$

D'autre part W_0 satisfait l'estimation :

$$\|W_0\|_{H_2} + |\zeta|^{1/2} \|W_0\|_W + |\zeta| \|W_0\|_{L_2} \leq \gamma(1+|\zeta|)^2 |\zeta|^{-1} |\Im m \zeta|^{-1} \|U\|_{H_1},$$

il en résulte, pour $W_k = \partial_{y_k} W$, en variable y_i , les normes étant prises dans $H^m(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^+)$, l'estimation :

$$(3,17) \quad \sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \|\partial_{y_k} W\|_{H^2} + |\zeta|^{1/2} \|\partial_{y_k} W\|_{H^1} + |\zeta| \|\partial_{y_k} W\|_{H^0} + \|\partial_{y_k} Q\|_{H^1} \right\} \leq \gamma(1+|\zeta|)^2 |\Im m \zeta|^{-2} \|U\|_{H_1}.$$

Il reste à estimer $\partial_{y_p} W$. Pour cela revenons au système (3,11) en considérant $y_1, \dots, y_{p-1}$ comme des paramètres et notons :

$$(3,18) \quad \begin{cases} \tilde{f} = \bar{f} + 2\nu F'_{y_i} \partial_{y_i y_r}^2 W + \nu F''_{y_i y_i} \partial_{y_r} W + \nabla_{y'} Q - \nu \Delta_{y'} W, \\ \tilde{g} = g - \partial_{y_i} W^{(i)}, \\ F'_{y_i} = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \varepsilon_i = \varepsilon^2, \end{cases}$$

les sommations par rapport à i s'étendent de 1 à $p-1$, $\nabla_{y'} Q$ représente le vecteur $(\partial_{y_1} Q, \dots, \partial_{y_{p-1}} Q, 0)$ et $\Delta_{y'} W$ représente le vecteur $\partial_{y_i y_i}^2 W$. Le système (3,11) devient alors :

$$(3,19) \quad \begin{cases} \nu(1+\varepsilon^2) \partial_{y_r}^2 W^{(i)} - \zeta W^{(i)} + \varepsilon_i \partial_{y_r} Q = \tilde{f}^{(i)}, i=1, \dots, p-1, \\ \nu(1+\varepsilon^2) \partial_{y_r}^2 W^{(p)} - \zeta W^{(p)} - \partial_{y_r} Q = \tilde{f}^{(p)}, \\ \partial_{y_r} W^{(p)} - \varepsilon_i \partial_{y_r} W^{(i)} = \tilde{g}, \\ W=0 \text{ pour } y_p=0 \text{ et } y_p=+\infty. \end{cases}$$

L'intérêt de ce système réside en ce que son second membre bénéficie de l'estimation suivante, grâce à (3,17), et (3,18) :

$$(3,20) \quad \sum_{j=1}^p \|\tilde{f}^{(j)}\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{H^2} \leq \gamma(1+|\zeta|)^2 |\Im m \zeta|^{-2} \|U\|_{H_1}, \quad \Im m \zeta \neq 0,$$

et qu'il ne nous reste plus qu'à résoudre le système différentiel en variable $y_p \in (0, \infty)$. Pour ce faire,

découplons (3,19) en posant $Z_i = W^{(i)} + \varepsilon_i W^{(p)}$, $i = 1, \dots, p-1$, nous obtenons :

$$(3,21) \quad \begin{cases} \nu(1+\varepsilon^2) \partial_{y_p}^2 Z_i - \tau Z_i = \tilde{f}^{(i)} + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}, \\ Z_i = 0 \text{ pour } y_p = 0 \text{ et } y_p = +\infty, i = 1, \dots, p-1, \end{cases}$$

$$(3,22) \quad (1+\varepsilon^2) \partial_{y_p} W^{(p)} = \tilde{g} + \varepsilon_i \partial_{y_p} Z_i.$$

Notons alors β la détermination de $[\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1/2} \tau^{1/2}$ telle que $\operatorname{Re} \beta < 0$ ce qui est toujours possible puisque $\operatorname{Im} \tau \neq 0$. La solution de (3,21) s'écrit alors, pour presque tout $y' = (y_1, \dots, y_{p-1})$ dans $\mathbb{R}^{p-1}$,

$$(3,23) \quad Z_i(y_p) = \int_0^\infty K(y_p, \eta) [\tilde{f}^{(i)}(\eta) + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}(\eta)] [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1} d\eta, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

où l'on note $\tilde{f}^{(i)}(\eta) \equiv \tilde{f}^{(i)}(y_1, \dots, y_{p-1}, \eta)$ et $K(y_p, \eta)$ est la fonction de Green définie par :

$$(3,24) \quad K(y_p, \eta) = (2\beta)^{-1} [e^{\beta(y_p - \eta)} - e^{\beta(y_p + \eta)}] = K_1(|y_p - \eta|) - K_1(y_p + \eta),$$

avec

$$K_1(z) = (2\beta)^{-1} e^{\beta z}.$$

D'autre part, on a l'estimation :

$$(3,25) \quad \int_0^\infty |K_1(z)| [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1} dz \leq [2|\tau|^{1/2} |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|]^{-1},$$

et il en résulte, d'après les propriétés des produits de convolution que l'on a pour $Z_i(y_p)$ (pour presque tout y') :

$$\|Z_i\|_{L_2(0, \infty)} \leq [|\tau|^{1/2} |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|]^{-1} \|\tilde{f}^{(i)} + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}\|_{L_2(0, \infty)}, \quad i = 1, \dots, p-1.$$

De plus, si l'on calcule $\partial_{y_p} Z_i$ et qu'on intègre par parties, on obtient :

$$(3,26) \quad \partial_{y_p} Z_i(y_p) = \int_0^\infty [K_1(|y_p - \eta|) + K_1(y_p + \eta)] [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1} \frac{d}{d\eta} [\tilde{f}^{(i)}(\eta) + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}(\eta)] d\eta - 2K_1(|y_p|) [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1} [\tilde{f}^{(i)}(0) + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}(0)].$$

L'intégrale, dans (3,26), est bornée dans $L_2(0, \infty)$, presque partout en y' , par :

$$[|\tau|^{1/2} |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|]^{-1} \|\tilde{f}^{(i)} + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}\|_{H_1(0, \infty)}.$$

Quant à l'autre terme, remarquons que $\tilde{f}^{(i)}(0)$ est la trace de $\tilde{f}^{(i)}$ sur le plan $y_p = 0$, et nous savons que

$$\|\tilde{f}^{(i)}(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^{p-1})} \leq \gamma \|\tilde{f}^{(i)}\|_{H^1}. \quad \text{De plus la quantité } 2K_1(y_p) [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1} \in L_2(0, \infty) \quad \forall y' \in \mathbb{R}^{p-1}.$$

En effet :

$$\|2K_1(y_p) [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1}\|_{L_2(0, \infty)} \leq [2|\tau| |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|]^{-1/2} [\nu(1+\varepsilon^2)]^{-1/4}.$$

Il résulte donc de (3,26) que l'on peut estimer $\partial_{y_p} Z_i$, $i = 1, \dots, p-1$:

$$(3,27) \quad \|\partial_{y_p} Z_i\|_{H^0} \leq \gamma [|\tau| |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|]^{-1/2} [1 + |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|^{-1/2}] \|\tilde{f}^{(i)} + \varepsilon_i \tilde{f}^{(p)}\|_{H^1}.$$

D'où, pour $\partial_{y_p}^2 Z_i$ et $\partial_{y_p}^3 Z_i$, on obtient immédiatement :

$$(3,28) \quad |\tau|^{-1/4} \|\partial_{y_p}^3 Z_i\|_{H^0} + |\tau|^{1/4} \|\partial_{y_p}^2 Z_i\|_{H^0} + |\tau|^{3/4} \|\partial_{y_p} Z_i\|_{H^0} \leq \\ \leq \gamma |\tau|^{1/4} |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|^{-1/2} [1 + |\operatorname{Re} \tau^{1/2}|^{-1/2}] (1 + |\tau|) |\operatorname{Im} \tau|^{-2} \|U\|_{H_1}.$$

Pour simplifier l'écriture des estimations, nous allons supposer que τ est choisi tel que

$$|\operatorname{Im} \tau| \geq a |\operatorname{Re} \tau| \quad \text{et} \quad |\tau| \geq \tau > 0 \quad \text{où} \quad a > 0.$$

Nous notons E_1 (Fig. 5) la région du plan complexe considérée, alors si $\zeta \in E_1$:

$$|\operatorname{Re} \zeta^{1/2}| \geq [(\sqrt{1+\alpha^2} - 1)(2\alpha)^{-1}]^{1/2} |\operatorname{Im} \zeta|^{1/2}, |\zeta| \leq \alpha^{-1} \sqrt{1+\alpha^2} |\operatorname{Im} \zeta| \text{ et } |\operatorname{Im} \zeta| \geq \alpha(1+\alpha^2)^{-1/2}.$$

Si l'on revient à (3,22), alors grâce à (3,28) et (3,20) on a, $\forall \zeta \in E_1$

$$(3,29) \quad |\zeta|^{-1/4} \|\partial_{y_p}^3 W^{(p)}\|_{H^0} + |\zeta|^{1/4} \|\partial_{y_p}^2 W^{(p)}\|_{H^0} + |\zeta|^{3/4} \|\partial_{y_p} W^{(p)}\|_{H^0} \leq \gamma \|U\|_{H_1}$$

où γ est indépendant de $\zeta \in E_1$. Enfin, d'après la définition de Z_1 on a la même estimation (3,29) pour $W^{(k)}$, $k=1, \dots, p-1$. Quant à l'estimation de $\partial_{y_p} Q$, on l'obtient à partir de (3,19), grâce à (3,29) et (3,20). Finalement (3,19) admet une solution unique $(W, \partial_{y_p} Q)$ qui vérifie pour $\zeta \in E_1$ (d'après 3,17) :

$$(3,30) \quad |\zeta|^{-1/4} \|W\|_{H^3} + |\zeta|^{1/4} \|W\|_{H^2} + |\zeta|^{3/4} \|W\|_{H^1} + |\zeta|^{-1/4} \|\partial_{y_p} Q\|_{H^1} \leq \gamma \|U\|_{H_1}.$$

Pour estimer la solution V de (3,4), il suffit de remarquer que presque partout on a $V = \sum_{j=0}^M \alpha_j V$,

d'utiliser (3,10) pour $\alpha_0 V$ et (3,17), (3,30) pour $\alpha_j V$ ($j \geq 1$), en revenant aux variables x_i . On obtient :

$$(3,31) \quad |\zeta|^{-1/4} \|V\|_{H_1 \cap \mathcal{W}} + |\zeta|^{1/4} \|V\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} + |\zeta|^{3/4} \|V\|_{\mathcal{W}} + |\zeta|^{-1/4} \|\nabla Q\|_{H_1} \leq \gamma \|U\|_{H_1},$$

γ étant une constante indépendante de $\zeta \in E_1$. En fait, (3,31) est encore valable pour la solution du problème (3,1), à cause de (3,3). Résumons ce résultat sous la forme du

Lemme 1

$\forall \zeta \in E_1 = \{\zeta; \zeta \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} \zeta| \geq \alpha |\operatorname{Re} \zeta|, \alpha > 0, |\zeta| \geq r > 0\},$

la résolvante de l'opérateur H vérifie l'estimation suivante :

$$|\zeta|^{-1/4} \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(H_1 \cap \mathcal{J}, H_3 \cap \mathcal{W})} + |\zeta|^{1/4} \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(H_1 \cap \mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} + \\ + |\zeta|^{3/4} \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(H_1 \cap \mathcal{J}, \mathcal{W})} \leq \gamma,$$

où γ est une constante indépendante de ζ .

III.4. SEMI-GROUPE $\mathcal{I}(t; H)$ FORMULATION - ESTIMATIONS

III.4.1. Définition du semi-groupe

Revenons au problème (1,1), sans second membre, c'est-à-dire au problème

$$(4,1) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = H U, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec $U_0 \in \mathcal{J}(\Omega), \mathcal{W}$ ou $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$. Ce problème est immédiatement résolu si l'on fait appel au

théorème de Hille-Yosida et Phillips [2] p. 626 : en effet H étant autoadjoint dans les trois espaces considérés, il est fermé et son domaine $\mathcal{D}_m(H)$ est dense; de plus on a pour $\operatorname{Re} \zeta > -K^{-2} \|R\|^{-1}$, l'inégalité (2,6). Il en résulte le

Lemme 2

L'opérateur H est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans $\mathcal{J}(\Omega), \mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ noté $\mathcal{I}(t; H)$. Il vérifie l'estimation :

$$(4,2) \quad \|\mathcal{I}(t; H)\| \leq e^{-K^{-2} \|R\|^{-1} t}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{J}(\Omega), \mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$. Enfin $U(t) = \mathcal{I}(t; H) U_0$ est la solution de (4,1) dans $\mathcal{J}(\Omega)$ si $U_0 \in \mathcal{J}(\Omega)$, dans $H_m \cap \mathcal{W}$ ($m=1,2$) si $U_0 \in H_m \cap \mathcal{W}$.

III,4.2. Formulation explicite de $\mathcal{I}(t;H)$

Montrons que $\mathcal{I}(t;H)U$ est un C^∞ -semi-groupe dans $\dot{J}(\Omega)$ (c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{I}(t;H)U \in \mathcal{D}_0(H), \forall U \in \dot{J}(\Omega), t > 0).$$

En effet, on peut remarquer que $R(\zeta;H)$ vérifie les conditions du corollaire 2.1 de l'article de A. Pazy [40]; mais nous allons le montrer directement. D'après le théorème de la page 349 de [4], on peut écrire pour $t > 0$

$$(4,3) \quad \forall U \in \mathcal{D}_0(H), \quad \mathcal{I}(t;H)U = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\zeta t} R(\zeta;H)U d\zeta$$

où γ est choisi > 0 . Définissons un nouveau contour Λ_1 de $\mathbb{C}$ formé de deux demi-droites passant par O , symétriques par rapport à l'axe réel, situées dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta < 0$ (Fig. 5). Alors, grâce

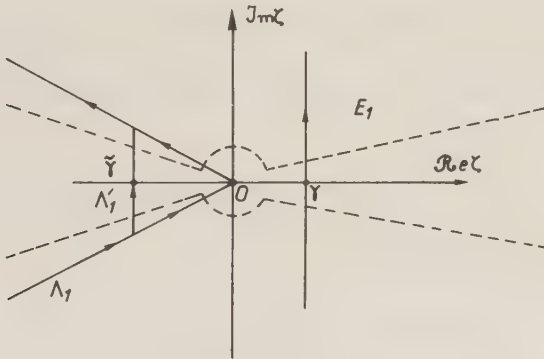


Fig. 5 - Contour Λ_1 .

- La zone pointillée délimite E_1 (III,3.4).

à (2,1) et (2,6) on peut remplacer le contour d'intégration dans (4,3) par Λ_1 et étendre la définition de (4,3) à $\dot{J}(\Omega)$ [$\mathcal{D}_0(H)$ dense] :

$$(4,4) \quad \forall t > 0, U \in \dot{J}(\Omega) \quad \mathcal{I}(t;H)U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_1} e^{\zeta t} R(\zeta;H)U d\zeta.$$

C'est alors que nous pouvons utiliser (4,4) pour faire plusieurs remarques. Premièrement (4,4) est encore valable dans $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, puisque (2,1) et (2,6) le sont aussi, c'est-à-dire que le semi-groupe admet la même représentation explicite dans les trois espaces considérés. Ensuite, à partir de (2,4), l'on peut pour $t > 0$ borner aisément $\mathcal{I}(t;H)U$ dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W} = \mathcal{D}_0(H)$, quand $U \in \dot{J}(\Omega)$; c'est-à-dire que $\forall U \in \dot{J}(\Omega)$, $\mathcal{I}(t;H)U \in \mathcal{D}_0(H)$. En conséquence, d'après le théorème de la page 310 de [4],

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{d^n \mathcal{I}(t;H)}{dt^n} = H^n \mathcal{I}(t;H)$$

est un opérateur borné et continu (avec la norme de $\mathcal{L}(\dot{J})$) pour $t \geq t_0 > 0$, $\forall t_0$ fixé. C'est en ce sens que l'on dit que l'on a un C^∞ -semi-groupe.

III,4.3. Estimations globales pour $\mathcal{I}(t;H)$

Revenons au problème (1,1) avec second membre f . A l'aide de Π_0 nous le mettons sous la forme plus adéquate :

$$(4,5) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = HU + \Pi_0 f, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où $(1 - \Pi_0)f$ est un gradient que l'on incorpore à ∇p . Précisons maintenant dans quel espace nous choisissons f . Pour l'étude du problème non linéaire, nous verrons qu'il est utile de considérer le cas où $\Pi_0 f \in H_1^0(\Omega) \cap \dot{J}(\Omega)$ (c'est le cas en particulier si $f \in H(\Omega)$), mais il faut remarquer qu'a priori f peut aussi dépendre de t .

Notons alors $C^0([0, \infty[; \mathcal{H})$ l'espace de Banach muni de la norme $U \rightarrow \|U\|_{\mathcal{H}} = \sup_{t \in [0, \infty[} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}$ constitué des fonctions $t \rightarrow U(t)$ continues sur $[0, \infty[$, à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Le problème est alors de résoudre (4,5) en supposant $U_0 \in H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ et f tel que $\Pi_0 f \in C^0([0, \infty[; H_1^0 \cap \mathcal{J})$ (réalisé si $f \in C^0([0, \infty[; H(\Omega))$). Pour cela, transformons (4,5) à l'aide de $\mathcal{I}(t; H)$, nous avons alors de manière équivalente :

$$(4,6) \quad U(t) = \mathcal{I}(t; H)U_0 + \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H)\Pi_0 f(\tau) d\tau,$$

et le problème est maintenant de voir si l'intégrale a un sens dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. En fait, il s'agit d'estimer

$\mathcal{I}(t; H)V$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, pour $V \in H_1^0 \cap \mathcal{J}$, et cela est réalisable grâce à l'estimation fondamentale du Lemme 1 et à la formulation (4,4). En effet $\forall \zeta \in \Lambda_1 \cap E_1$, on a d'après le lemme 1 :

$$(4,7) \quad \begin{cases} \|R(\zeta; H)U\|_{\mathcal{W}} \leq \gamma |\zeta|^{-3/4} \|U\|_{H_1}, \\ \|R(\zeta; H)U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma |\zeta|^{-1/4} \|U\|_{H_1}, \end{cases}$$

et si $\zeta \in \Lambda_1 \cap E_1$ (c'est-à-dire $|\zeta| \leq r$), on a, en utilisant (1,7) et (2,4)

$$(4,8) \quad \begin{cases} \|R(\zeta; H)U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq C |\zeta| |\Im \zeta|^{-1} \|U\|_{\mathcal{J}} \leq \gamma \|U\|_{\mathcal{J}} \leq \gamma \|U\|_{H_1}, \\ \|R(\zeta; H)U\|_{\mathcal{W}} \leq K \gamma \|U\|_{H_1}. \end{cases}$$

Maintenant, puisque le spectre de H est situé sur la demi-droite $\Im m \zeta = 0$, $\Re e \zeta \leq -K^{-2} \|\mathcal{R}\|^{-1}$, on peut encore modifier Λ_1 en considérant Λ'_1 où deux segments, symétriques par rapport à l'axe réel, de Λ_1 sont remplacés par un segment parallèle à l'axe des imaginaires, son abscisse $\tilde{\gamma}$ vérifiant $-K^{-2} \|\mathcal{R}\|^{-1} < \tilde{\gamma} < 0$ (Fig. 5). Si ζ appartient à la portion de Λ'_1 d'abscisse $\tilde{\gamma}$ on a $|\zeta| \leq M$ et, d'après (2,6) :

$$\|R(\zeta; H)U\|_{\mathcal{J}} \leq [\tilde{\gamma} + K^{-2} \|\mathcal{R}\|^{-1}]^{-1},$$

il en résulte, d'après l'inégalité évidente :

$$\|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \|\mathcal{R}\| [\|(\zeta I - H)U\|_{\mathcal{J}} + |\zeta| \|U\|_{\mathcal{J}}],$$

que l'on a dans ces conditions

$$(4,9) \quad \|R(\zeta; H)U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \|\mathcal{R}\| [1 + M(\tilde{\gamma} + K^{-2} \|\mathcal{R}\|^{-1})^{-1}] \|U\|_{\mathcal{J}} = \gamma \|U\|_{\mathcal{J}},$$

c'est-à-dire, en fait, les mêmes estimations que (4,8). Il ne reste plus qu'à utiliser la représentation (4,4) avec Λ'_1 , ainsi que (4,7), (4,8) et (4,9) pour chaque portion intéressée, pour arriver immédiatement au résultat :

Lemme 3

Il existe deux constantes positives k et γ telles que, pour $t > 0$, on ait les deux estimations :

$$(4,10) \quad \begin{cases} \|\mathcal{I}(t; H)\|_{\mathcal{L}(H_1^0 \cap \mathcal{J}, \mathcal{W})} \leq \gamma (1+t^{-1/4}) e^{-kt}, \\ \|\mathcal{I}(t; H)\|_{\mathcal{L}(H_1^0 \cap \mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma (1+t^{-3/4}) e^{-kt}. \end{cases}$$

Nous sommes à présent en mesure d'estimer l'intégrale dans (4,6). En effet, elle est bornée dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ par la quantité

$$\gamma \|\Pi_0 f\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}} \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-1/4}] e^{-k(t-\tau)} d\tau \leq \gamma [k^{-1} + k^{-1/4} \int_0^\infty \tilde{t}^{-3/4} e^{-\tilde{t}} d\tilde{t}] \|\Pi_0 f\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}},$$

c'est-à-dire que l'on a l'estimation :

$$(4,11) \quad \|\int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H)\Pi_0 f(\tau) d\tau\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma \|\Pi_0 f\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}},$$

pour une certaine constante γ indépendante de t . Il en résulte que (4,6) définit bien la solution de (4,5) (c'est-à-dire (1,1)) dans

$$C^0([0, \infty[; H_1(\Omega) \cap \mathcal{W}]), \text{ si } U_0 \in H_1 \cap \mathcal{W} \text{ et } \Pi_0 f \in C^0([0, \infty[; H_1^0 \cap \mathcal{J}^0).$$

Donnons enfin une propriété de la solution de (4,5) quand $t \rightarrow \infty$: si $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}^0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, alors à partir de (4,10) il est facile de montrer que $\|U(t)\|_{H_1 \cap \mathcal{W}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. De plus si la convergence vers 0 est exponentielle pour $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}^0}$, elle l'est aussi pour $\|U(t)\|_{H_1 \cap \mathcal{W}}$.

IV. PROBLÈME LINÉAIRE COMPLET

IV.1. L'OPÉRATEUR $\mathcal{A}_\lambda$

IV.1.1. Définition

Nous avons vu au § II.4.4. qu'il apparaît une quantité de la forme $V_0 \cdot \nabla U + B_0 U$ dans le terme linéaire de (II.4.5). Nous l'avons abandonnée au chapitre III, car en fait elle n'influe que comme une perturbation du terme $\Delta \mathcal{R}^{-1} U$ dont l'ordre de différentiation est plus élevé. Nous allons maintenant nous en occuper, c'est-à-dire, en particulier traiter le problème linéaire :

$$(1,1) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta \mathcal{R}^{-1} U - (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) - \nabla p, \\ \nabla \cdot U^{(p)} = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

et U vérifie $U|_{\partial\Omega} = 0$ dans le cas (i), ou $U|_{\partial\Omega - \bar{\Gamma}} = 0$ et des conditions de périodicité (Ω) dans

le cas (ii). Pour cela, commençons par définir l'opérateur linéaire $\mathcal{A}_\lambda$ de la manière suivante. Remarquons que $\forall U, V \in J(\Omega)$,

$$(1,2) \quad \begin{aligned} (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U, V)_{L_2} &= -(U, V_0 \cdot \nabla V - B_0^* V)_{L_2} \\ \text{où } B_0^* &\text{ désigne l'adjoint de } B_0 \text{ dans } L_2(\Omega). \text{ Il en résulte que pour } U \in J(\Omega) \text{ la fonctionnelle } V \rightarrow \\ (U, V_0 \cdot \nabla V - B_0^* V)_{L_2} &\text{ est linéaire continue dans } \mathcal{W}. \text{ En effet } \exists \gamma > 0 \text{ tel que} \\ (1,2) \quad |(U, V_0 \cdot \nabla V - B_0^* V)_{L_2}| &\leq \gamma \|U\|_{L_2} \|V\|_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

On peut alors construire un opérateur linéaire $\mathcal{A}_\lambda$ tel que

$$(1,3) \quad (\mathcal{R}^{-1} \mathcal{A}_\lambda U, V)_{\mathcal{W}} = (U, V_0 \cdot \nabla V - B_0^* V)_{L_2}, \quad \forall V \in \mathcal{W}.$$

Remarquons que l'on a $\forall U \in J(\Omega)$, d'après (1,2),

$$(1,4) \quad \|\mathcal{A}_\lambda U\|_{\mathcal{W}} \leq \|\mathcal{R}\| \gamma \|U\|_{L_2},$$

or, $J(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{J}(\Omega)$, d'où, grâce à (1,4) on étend la définition de $\mathcal{A}_\lambda$ à $\mathcal{J}(\Omega)$. Il en résulte que l'opérateur $\mathcal{A}_\lambda$ ainsi défini est linéaire continu de $\mathcal{J}(\Omega)$ dans $\mathcal{W}$. Expliquons quelque peu cette notation : dans les cas usuels V_0 et B_0 dépendent d'un nombre fini de paramètres parmi lesquels il y en a souvent un qui est privilégié (nombre de Taylor, nombre de Rayleigh). Nous notons λ ce paramètre (scalaire) et nous supposons que $V_0 = V_0(\lambda)$ et $B_0 = B_0(\lambda)$ dépendent de manière affine de λ . Il en résulte que $\mathcal{A}_\lambda$ dépend de manière affine de λ : on peut donc écrire $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \lambda \mathcal{A}_1$. Nous supposons de plus que le phénomène physique a un sens pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Ainsi, dans le chapitre IX, nous donnons un exemple de

décomposition où $A_0 = 0$ et où $\lambda = \sqrt{R\alpha}$, $R\alpha$ étant le nombre de Rayleigh.

IV,1.2. Restriction de α_λ à $H_m \cap \mathcal{W}$

Supposons $U \in J(\Omega)$, alors $\forall V \in \mathcal{W}$ on a, après intégration par parties :

$$(1,5) \quad (\mathcal{R}^{-1} \alpha_\lambda U, V)_{\mathcal{W}} = -(V_0 \cdot \nabla U + B_0 U, V)_{L_2} = (\mathcal{R}^{-1} \mathcal{E} \Pi_0 (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U), V)_{\mathcal{W}}.$$

Or, on sait que si $U \in H_m \cap \mathcal{W}$, alors $\Pi_0 (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) \in H_{m-1} \cap \mathring{J}$. On peut même dire mieux, car d'une part $B_0 U \in H_m \cap H(\Omega)$ (par hypothèse sur B_0), d'autre part on peut écrire, sur $\partial\Omega$ (sur $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ dans le cas (ii)) : $V_0 \cdot \nabla U = V_{0t} \cdot \nabla_t U + V_{0n} \cdot \nabla_n U$ (partie tangentielle et partie normale), et par construction (II,4.4) $V_{0n} = 0$ et $U = 0 \Rightarrow \nabla_t U = 0$ sur $\partial\Omega$, d'où $V_0 \cdot \nabla U \in H_{m-1} \cap H(\Omega)$ ($m \geq 2$), et il en résulte que $\Pi_0 (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) \in H_{m-1}^0 \cap \mathring{J}(\Omega)$. D'où $\mathcal{R}^{-1} \mathcal{E} \Pi_0 (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) \in H_{m+1}(\Omega) \cap \mathcal{W}$.

L'égalité (1,5) devant être réalisée $\forall V \in \mathcal{W}$, et $J(\Omega)$ étant dense dans $\mathcal{W}$, on a $\forall U \in \mathcal{W}$

$$(1,6) \quad \alpha_\lambda U = \mathcal{E} \Pi_0 (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) \in H_2 \cap \mathcal{W}.$$

et (1,6) peut être restreinte à $U \in H_m \cap \mathcal{W}$ car alors (1,5) reste valable et $\alpha_\lambda U \in H_{m+1} \cap \mathcal{W}$.

Il résulte de (1,4) et (1,6) qu'il existe des constantes positives $C_m(\lambda)$ et $C'_m(\lambda)$ telles que :

$$(1,7) \quad \begin{cases} \|\alpha_\lambda U\|_{\mathcal{W}} \leq C_0(\lambda) \|U\|_{\mathring{J}} & , \quad \forall U \in \mathring{J}(\Omega), \\ \|\alpha_\lambda U\|_{H_{m+1} \cap \mathcal{W}} \leq C_m(\lambda) \|U\|_{H_m \cap \mathcal{W}}, & \forall U \in H_m \cap \mathcal{W}, \quad m \geq 1, \\ \|\mathcal{H} \alpha_\lambda U\|_{H_{m-1}^0 \cap \mathring{J}} \leq C'_m(\lambda) \|U\|_{H_m \cap \mathcal{W}}, & \forall U \in H_m \cap \mathcal{W}, \quad m \geq 2, \\ \|\mathcal{H} \alpha_\lambda U\|_{\mathring{J}} \leq C'_1(\lambda) \|U\|_{\mathcal{W}}, & \forall U \in \mathcal{W}, \end{cases}$$

et

$$(1,8) \quad \begin{cases} \alpha_\lambda \in \mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W}) \overset{\infty}{\underset{m=1}{\tilde{\cap}}} \mathcal{L}(H_m \cap \mathcal{W}, H_{m+1} \cap \mathcal{W}), \\ \mathcal{H} \alpha_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathring{J}) \overset{\infty}{\underset{m=2}{\tilde{\cap}}} \mathcal{L}(H_m \cap \mathcal{W}, H_{m-1}^0 \cap \mathring{J}). \end{cases}$$

IV,1.3. Propriétés de la fonction $\lambda \rightarrow \alpha_\lambda$

Nous avons vu au § IV,1.1 que l'opérateur α_λ s'écrit de la manière suivante :

$$(1,9) \quad \alpha_\lambda = A_0 + \lambda A_1$$

où $\lambda \in I = [0, M] \subset \mathbb{R}^+$. On déduit aisément de (1,9) que A_0 et A_1 satisfont aussi (1,8); en effet, pour $\lambda = 0$ $\alpha_0 \equiv A_0$ et pour $\lambda \neq 0$ $A_1 = \lambda^{-1}(\alpha_\lambda - A_0)$. Notons que les opérateurs α_λ, A_0, A_1 sont compacts dans $\mathring{J}(\Omega)$ et dans $H_m \cap \mathcal{W}$, $m \geq 1$, grâce à la compacité des injections canoniques $\mathcal{W} \rightarrow \mathring{J}$ et $H_{m+1} \cap \mathcal{W} \rightarrow H_m \cap \mathcal{W}$. De plus, supposons* que $1 - A_0$ admette un inverse borné dans $\mathring{J}(\Omega)$. Il serait équivalent de dire que $1 - A_0$ est injectif dans $H_m \cap \mathcal{W}$ pour un certain m fixé. En effet, grâce à la compacité de A_0 dans $\mathring{J}$, on a

$$(1 - A_0)^{-1} \text{ borné dans } \mathring{J} \iff (1 - A_0) \text{ injectif dans } \mathring{J};$$

de plus, l'aspect régularisant de A_0 , marqué par (1,8), nous permet d'écrire :

$$(1 - A_0) \text{ injectif dans } \mathring{J} \iff (1 - A_0) \text{ injectif dans } H_m \cap \mathcal{W},$$

$\forall m > 0$, et le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

IV,1.4. L'opérateur $\mathcal{H}T_\lambda$

Notons $T_\lambda = 1 - \alpha_\lambda$. C'est un opérateur linéaire borné dans $\mathring{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_m \cap \mathcal{W}$ ($m \geq 1$) et l'on sait

*Il faut noter que si cette hypothèse n'est pas réalisée pour un certain choix de λ , on peut faire une translation sur λ et changer sa définition de manière à ce qu'alors $1 - A_0$ soit inversible.

déjà que $T_0 = 1 - A_0$ admet un inverse borné dans ces espaces. Considérons maintenant l'opérateur linéaire non borné HT_λ dans $\tilde{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ ou $H_2 \cap \mathcal{W}$. H étant fermé et T_λ borné dans ces espaces il en résulte aisément que HT_λ est fermé dans $\tilde{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$. Supposons alors que son domaine de définition $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$, $m = 0, 1, 2$, soit indépendant de $\lambda \in \mathbb{C}$. En fait ce n'est véritablement une hypothèse que pour $m=1$ ou 2 car pour $m=0$ on a

$$\mathcal{D}_0(H) = H_2 \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{W} \subseteq \mathcal{D}_0(HA_\lambda) \Rightarrow \mathcal{D}_0(HT_\lambda) = H_2 \cap \mathcal{W}.$$

En fait, grâce à l'hypothèse admise pour $m=1$ et 2 , pour étudier $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$ il suffit de voir que ce n'est autre que $T_0^{-1} \{ \mathcal{D}_m(H) \}$, et il est élémentaire de montrer que si $\mathcal{D}_m(H)$ est dense alors $T_0^{-1} \{ \mathcal{D}_m(H) \}$ est dense lui aussi. Il en résulte que $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$ est dense pour $m=0, 1, 2$ et $\mathcal{D}_m(HT_\lambda) \subseteq H_{m+2} \cap \mathcal{W}$.

Montrons encore une inégalité dont nous nous servirons par la suite, qui montre bien que HA_λ n'intervient que comme une perturbation pour l'aspect dissipatif de H . En effet,

$$\begin{aligned} \forall U \in \mathcal{D}_0(HT_\lambda) &= \mathcal{D}_0(H) \\ (HT_\lambda U, U)_J &= (HU, U)_J - (HA_\lambda U, U)_J = -(\mathcal{R}^{-1}U, U)_W - (HA_\lambda U, U)_J \\ (1,10) \quad \operatorname{Re}(HT_\lambda U, U)_J &\leq -\|\mathcal{R}\|^{-1} \|U\|_W^2 + C'_1(\lambda) \|U\|_W \cdot \|U\|_J, \end{aligned}$$

d'après (III,1,6) et (1,7). Ensuite on utilise l'inégalité $ab \leq \varepsilon a^2 + (4\varepsilon)^{-1} b^2$ pour montrer :

$$\operatorname{Re}(HT_\lambda U, U)_J \leq \frac{1}{4} \|\mathcal{R}\| [C'_1(\lambda)]^2 \|U\|_J^2,$$

et, par notre hypothèse (1,9), nous pouvons dire qu'il existe une fonction $\lambda \rightarrow \gamma_\lambda$ continue de I dans $\mathbb{R}$, telle que

$$(1,11) \quad \operatorname{Re}(HT_\lambda U, U)_J \leq \gamma_\lambda \|U\|_J^2.$$

IV.2. SPECTRE DE T_λ

IV.2.1. Première méthode

D'après le § IV,1.3 la fonction $\lambda \rightarrow A_\lambda$ est analytique dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\tilde{J})$. En effet $\forall \lambda_0 \in \mathbb{C}$ on a

$$A_\lambda = A_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) A_1.$$

D'autre part, nous savons que $\{A_\lambda\}$ est une famille d'opérateurs compacts et que $1 - A_0$ est inversible. Nous sommes alors en mesure d'appliquer un théorème de [45] qui affirme que T_λ^{-1} est méromorphe dans $\mathbb{C}$. Nous notons $\sigma(T_\lambda) = \{\lambda; \lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda^{-1} \text{ non défini ou non borné}\}$ le "spectre" de T_λ . Il résulte de la méromorphie d'après [45] de $\lambda \rightarrow T_\lambda^{-1}$ que $\sigma(T_\lambda)$ est discret; et de la compacité de A_λ on déduit que si $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$ alors λ^{-1} est valeur propre de l'opérateur $(1 - A_0)^{-1} A_1$, compact dans $\tilde{J}(\Omega)$.

IV.2.2. Méthode directe

Pour avoir le développement en série de Laurent de T_λ^{-1} pour λ dans un voisinage $\mathcal{V}(\lambda_0)$, $\lambda_0 \in \sigma(T_\lambda)$, on doit opérer directement. Notons que pour $\lambda = 0$, T_0 est inversible, c'est pourquoi nous pouvons supposer que $0 \notin \mathcal{V}(\lambda_0)$. Dans ces conditions si T_λ est inversible, on peut écrire :

$$(2,1) \quad T_\lambda^{-1} = \lambda^{-1} R[\lambda^{-1}; (1 - A_0)^{-1} A_1] \cdot (1 - A_0)^{-1},$$

et, λ_0^{-1} appartenant au spectre de $(1 - A_0)^{-1} A_1$, on peut utiliser le résultat de [2] page 572 qui donne le développement de la résolvante au voisinage d'un pôle. Notant ν l'indice de la valeur propre λ_0^{-1} pour $(1 - A_0)^{-1} A_1$

et $E_{(T_\lambda)}(\lambda_0)$ l'opérateur projection sur le sous-espace invariant, tel qu'il est défini par exemple dans [2] pages 558 et 573, on a :

$$(2,2) \quad E_{(T_\lambda)}(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e(\tau; \lambda_0^{-1}) R[\tau; (1-A_0)^{-1} A_1] d\tau$$

où Γ est une courbe de Jordan fermée entourant λ_0^{-1} et contenue dans un voisinage de λ_0^{-1} tel que $e(\tau; \lambda_0^{-1})$ y soit identiquement égale à 1, et la fonction $e(\tau; \lambda_0^{-1})$ est identiquement nulle sur le reste du spectre de $(1-A_0)^{-1} A_1$ (possible car ce spectre est discret). Il vient alors

$$(2,3) \quad R[\lambda^{-1}; (1-A_0)^{-1} A_1] = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-1} - \lambda_0^{-1})^{-n} A_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} A'_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

avec $A_{-n} = [(1-A_0)^{-1} A_1 - \lambda_0^{-1} 1]^{n-1} E_{(T_\lambda)}(\lambda_0)$, les A'_n étant des opérateurs linéaires bornés, et la série $\sum_{n=0}^{\infty} A'_n (\lambda - \lambda_0)^n$ convergeant avec la norme des opérateurs pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$; d'où, d'après (2,1), le développement de T_λ^{-1} :

$$(2,4) \quad T_\lambda^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_0 \lambda^{n-1} (\lambda - \lambda_0)^{-n} [1 - \lambda_0 (1-A_0)^{-1} A_1]^{n-1} E_{(T_\lambda)}(\lambda_0) (1-A_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n (\lambda - \lambda_0)^n$ convergeant avec la norme des opérateurs linéaires bornés, pourvu que $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$.

IV,2.3. Identité des spectres dans $H_m \cap \mathcal{W}$ et $\hat{J}(\Omega)$

Terminons ce paragraphe en remarquant, d'une part que (2,1) et (2,4) sont vérifiées aussi bien dans $\mathcal{L}(\hat{J})$ que dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$, et que d'autre part $\sigma(T_\lambda)$ est indépendant de l'espace choisi. En effet si $\lambda \in \sigma_0(T_\lambda)$, $\exists U \in J(\Omega)$ tel que $T_\lambda U = 0$, c'est-à-dire $U = \alpha_\lambda U$, d'où $U \in H_m \cap \mathcal{W}$, $\forall m > 0$ et $\lambda \in \sigma_m(T_\lambda)$. Réciproquement si $\lambda \in \sigma_m(T_\lambda)$, $\exists U \in H_m \cap \mathcal{W}$ tel que $T_\lambda U = 0$ or $H_m \cap \mathcal{W} \subset \hat{J}(\Omega)$, d'où $\lambda \in \sigma_0(T_\lambda)$. Il est bien évident que ceci est dû en grande partie à la compacité de α_λ qui entraîne l'existence de $U \neq 0$ tel que $T_\lambda U = 0$ si $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$.

IV,3. L'OPÉRATEUR $G(\lambda)$

IV,3.1. Définition de $G(\lambda)$

Pour étudier l'opérateur non borné HT_λ , il est pratique de se ramener par une transformation simple à l'étude de l'opérateur $G(\lambda) = (HT_\lambda - \alpha 1)^{-1}$ où α réel est choisi adéquatement. Remarquons d'abord que pour un certain α réel choisi tel que $\alpha^{-1} \notin \sigma[(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]$, ce qui est possible car $(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f$ est compact dans les espaces considérés et $\sigma[(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]$ est indépendant de l'espace choisi ($\hat{J}$, $\mathcal{W}$, ou $H_2 \cap \mathcal{W}$) de la même manière qu'au § IV,2.3, alors on a l'identité

$$(3,1) \quad HT_\lambda - \alpha 1 = H(1-A_0)[1 - \alpha(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f] \{1 - \lambda[1 - \alpha(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]^{-1} (1-A_0)^{-1} A_1\},$$

dans $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$. Remarquons que pour $\lambda_0 = 0$, (3,1) montre que $HT_0 - \alpha 1$ admet un inverse continu. Il en résulte que par les mêmes raisonnements qu'au § IV,2 $(HT_\lambda - \alpha 1)^{-1}$ est analytique pour $\lambda \in \mathcal{V}(0)$ (voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$). Soit maintenant $\lambda_0 \neq 0 \in I$, montrons que l'on peut choisir α tel que λ_0^{-1} soit en dehors du spectre de $[1 - \alpha(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]^{-1} (1-A_0)^{-1} A_1$ (discret grâce à la compacité de A_1), et cela $\forall \lambda_0 \in I$.

On a d'abord, comme au § IV,2 l'identité entre les spectres dans $\hat{J}$, $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$ puisque A_1 satisfait (1,8) comme α_λ et que $[1 - \alpha(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]^{-1} (1-A_0)^{-1}$ est borné dans ces trois espaces. Plaçons nous donc dans $\hat{J}(\Omega)$ et prenons $\alpha > \sup_{\lambda \in I} \{\delta_\lambda\}$, toujours tel que $\alpha^{-1} \notin \sigma[(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]$, ce qui est possible.

Supposons que $\lambda^{-1} \in \sigma\{[1 - \alpha(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]^{-1} (1-A_0)^{-1} A_1\}$, alors $\exists U \neq 0 \in \hat{J}(\Omega)$ tel que

$$U = \lambda [1 - \alpha(1-A_0)^{-1} \mathcal{C}_f]^{-1} (1-A_0)^{-1} A_1 U$$

et il en résulte que $U \in H_m \cap W$ ($m \geq 1$) et que $(HT_\lambda - \alpha 1)U = 0$. Mais, d'après (1,11), on a

$$\operatorname{Re}((HT_\lambda - \alpha 1)U, U)_g + (\alpha - \gamma_\lambda) \|U\|_g^2 \leq 0$$

ce qui donne ici $\alpha - \gamma_\lambda \leq 0$, qui est impossible grâce à notre choix de α . Il en résulte que $\forall \lambda \in I$, il existe un inverse borné de l'opérateur $HT_\lambda - \alpha 1$. Nous noterons

$$(3,2) \quad G(\lambda) = (HT_\lambda - \alpha 1)^{-1}.$$

IV,3.2. Premières propriétés de $G(\lambda)$

Par les mêmes raisonnements qu'au § IV,2 pour T_λ , on montre aisément que la fonction $\lambda \rightarrow \{1 - \lambda [1 - \alpha(1 - A_0)^{-1}C_f]^{-1}(1 - A_0)^{-1}A_1\}^{-1}$ est méromorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(W) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap W)$.

D'où, l'identité :

$$(3,3) \quad G(\lambda) = \{1 - \lambda [1 - \alpha(1 - A_0)^{-1}C_f]^{-1}(1 - A_0)^{-1}A_1\}^{-1} [1 - \alpha(1 - A_0)^{-1}C_f]^{-1}(1 - A_0)^{-1}C_f,$$

montre d'une part que $\lambda \rightarrow G(\lambda)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap W) \cap \mathcal{L}(W, H_3 \cap W) \cap \mathcal{L}(H_m \cap W, H_{m+2} \cap W)$, d'autre part que $\lambda \rightarrow G(\lambda)$ est analytique dans un voisinage de I , $\forall I$,

du plan complexe. Enfin, comme au § IV,2.3, on montre que le spectre de $G(\lambda)$ est indépendant de l'espace où l'on se place : $\sigma[G(\lambda)] = \{\zeta; \zeta \in \mathbb{C}, \zeta 1 - G(\lambda) \text{ non injectif}\}$, puisqu'il n'est constitué que de valeurs propres.

IV,3.3. Dépendance par rapport à λ de $\sigma[G(\lambda)]$

Pour étudier la dépendance en λ du spectre de $G(\lambda)$, nous allons utiliser un théorème de perturbations dû à Rellich, que l'on trouve dans [2] pages 586 et 587. Notons $E_{G(\lambda)}(\mu)$ la projection sur le sous-espace invariant $\mathcal{E}[\mu; G(\lambda)]$ associé à la valeur propre μ de $G(\lambda)$, telle qu'elle est définie dans [2] page 573. Remarquons déjà que $\mathcal{E}[\mu; G(\lambda)]$ est de dimension finie grâce à la compacité de $G(\lambda)$ et que de plus, grâce à l'aspect régularisant de $G(\lambda)$ vu au § IV,3.2, nous avons

$$(3,4) \quad E_{G(\lambda)}(\mu) \{\mathcal{J}\} = E_{G(\lambda)}(\mu) \{W\} = E_{G(\lambda)}(\mu) \{H_2 \cap W\} = \mathcal{E}[\mu; G(\lambda)].$$

Soit $\lambda_0 \in I$ et $\mu_0 \in \sigma[G(\lambda_0)]$, notons m la dimension de $\mathcal{E}[\mu_0; G(\lambda_0)]$, nous allons étudier le comportement du spectre de $G(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$ (voisinage de λ_0 dans $\mathbb{C}$). Alors, d'après le théorème cité, nous avons le résultat :

$\exists \delta > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\exists k$ fonctions $\lambda \rightarrow \mu_i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, k$) analytiques en $(\lambda - \lambda_0)^{1/n}$ (en fixant une détermination), $k \leq m$, n étant un certain entier positif; ces fonctions vérifient

$$(3,5) \quad \sum_{i=1}^k E_{G(\lambda)}(\mu_i) = E_{G(\lambda_0)}(\mu_0) + (\lambda - \lambda_0) E_1(\lambda)$$

où $\lambda \rightarrow E_1(\lambda)$ est une fonction analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(W) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap W)$; de plus

$$(3,6) \quad \sum_{i=1}^k \dim \mathcal{E}[\mu_i; G(\lambda)] = \dim \mathcal{E}[\mu_0; G(\lambda_0)] = m.$$

Donnons, pour être complet, quelques précisions sur les sous-espaces invariants et sur le nombre n défini plus haut. Soit $\{U_j; j = 1, \dots, m\}$ une base de $\mathcal{E}[\mu_0; G(\lambda_0)]$, on sait [2] page 587 que

$\{\sum_{i=1}^k E_{G(\lambda)}(\mu_i) U_j; j = 1, \dots, m\}$ forme une base de la somme directe $\mathcal{E}[\mu_1; G(\lambda)] \oplus \dots \oplus \mathcal{E}[\mu_k; G(\lambda)]$

Il en résulte que tout élément de cet espace peut s'écrire

$$U(\lambda) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{i=1}^k E_{G(\lambda)}(\mu_i) U_j = \left[\sum_{i=1}^k E_{G(\lambda)}(\mu_i) \right] \sum_{j=1}^m \alpha_j U_j,$$

ce qui, d'après (3,5), peut s'écrire

$$U(\lambda) = U_0 + (\lambda - \lambda_0) U_1(\lambda),$$

avec

$$U_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j U_j \quad \text{et} \quad U_1(\lambda) = E_1(\lambda) U_0,$$

où $U_0 \in \mathcal{E}[\mu_0; G(\lambda_0)]$ et $\lambda \rightarrow U_1(\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$. Posons alors $\mu_i(\lambda) = \mu_0 + \varepsilon_i(\lambda)$, et supposons que U_0 soit un vecteur propre de $G(\lambda_0)$. Il existe alors des α_j , $j=1, \dots, m$ tels que

$$U_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j U_j \quad \text{et posons} \quad U(\lambda) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{i=1}^k E_{G(\lambda)}(\mu_i) U_j, \quad \text{on a alors, successivement :}$$

$$[\mu_0 1 - G(\lambda_0)] U_0 = 0$$

$$[\mu_i(\lambda) 1 - G(\lambda)] U(\lambda) - \varepsilon_i(\lambda) U(\lambda) = O(\lambda - \lambda_0),$$

grâce à l'analyticité de G et U_1 . Décomposons $U(\lambda)$ sur $\mathcal{E}[\mu_1; G(\lambda)] \oplus \dots \oplus \mathcal{E}[\mu_k; G(\lambda)] : U(\lambda) =$

$$\sum_{i=1}^k U_i(\lambda) = \sum_{i=1}^k E_{G(\lambda)}(\mu_i) U_0, \quad \text{nous obtenons alors (puisque } E_{G(\lambda)}(\mu_i) \text{ commute avec } G(\lambda)) :$$

$$[\mu_i(\lambda) 1 - G(\lambda)] U_i(\lambda) - \varepsilon_i(\lambda) U_i(\lambda) = O(\lambda - \lambda_0),$$

et il est nécessaire de se pencher sur l'indice $\nu_i(\lambda)$ de $\mu_i(\lambda)$ pour poursuivre le raisonnement. En effet, supposons que $\nu_i = 1$, alors $[\mu_i(\lambda) 1 - G(\lambda)] U_i(\lambda) = 0$ car $U_i(\lambda)$ est vecteur propre et il en résulte que $\varepsilon_i(\lambda) = O(\lambda - \lambda_0)$. Si $\nu_i(\lambda) = \nu_i \neq 1$, alors on montre aisément que l'on a : $[\varepsilon_i(\lambda)]^{\nu_i} = O(\lambda - \lambda_0)$ où $\nu_i \leq \nu_i$.

IV.4. LE SPECTRE DE HT_λ

IV.4.1. Structure et dépendance en λ de $\sigma(HT_\lambda)$

L'étude du § IV.3 sur $G(\lambda) = (HT_\lambda - \alpha 1)^{-1}$ va nous permettre d'en déduire les propriétés relatives à HT_λ , grâce à la méthode développée aux pages 600-601 de [2]. Nous avons vu au § IV.1.4 que l'opérateur HT_λ est fermé dans $\mathcal{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$, $H_2 \cap \mathcal{W}$ et que $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$ ($m = 0, 1, 2$) est dense respectivement dans ces espaces; de plus α est dans l'ensemble résolvant de HT_λ , $\forall \lambda \in \mathcal{V}(1)$. Il en résulte alors que : le spectre de $G(\lambda)$ est homéomorphe au spectre de HT_λ auquel on adjoint $\{\infty\}$. Plus précisément si on note $\mu = \Phi(\tau) = (\tau - \alpha)^{-1}$, alors

$$\Phi[\sigma(HT_\lambda) \cup \{\infty\}] = \sigma[G(\lambda)].$$

Comme première conséquence, le spectre de HT_λ est discret et, l'identité

$$[\mu 1 - G(\lambda)]^m = \mu^m [G(\lambda)]^m (HT_\lambda - \tau 1)^m$$

montre qu'il n'est formé que de valeurs propres de mêmes indices et multiplicités que les valeurs propres μ correspondantes pour $G(\lambda)$. Comme deuxième conséquence, si $\mu_0 \neq 0 \in \sigma[G(\lambda)]$ correspond par Φ à $\tau_0 \in \sigma(HT_\lambda)$, alors par construction ([2] p. 601)

$$(4.1) \quad E_{(HT_\lambda)}(\tau_0) = E_{G(\lambda)}(\mu_0) \quad , \quad \mu_0 = (\tau_0 - \alpha)^{-1}.$$

Remarquons ensuite que $\sigma(HT_\lambda)$ est indépendant de l'espace où l'on se place ($\mathcal{J}$, $\mathcal{W}$, ou $H_2 \cap \mathcal{W}$), et que si $\tau \in \sigma(HT_\lambda)$ alors $\exists U \neq 0$ tel que $(HT_\lambda - \tau 1)U = 0$, d'où par (1,11)

$$\operatorname{Re}((HT_\lambda - \tau 1)U, U)_{\mathcal{J}} + (\operatorname{Re} \tau - \gamma_\lambda) \|U\|_{\mathcal{J}}^2 \leq 0$$

c'est-à-dire $\operatorname{Re} \tau < \gamma_\lambda$. $\sigma(HT_\lambda)$ est donc « à gauche » de la droite d'abscisse γ_λ du plan

complexe. Enfin, d'après les résultats relatifs à la dépendance en λ des valeurs propres de $G(\lambda)$ on en déduit :

Lemme 4

Si $\zeta_0 \in \sigma(\mathbf{HT}_{\lambda_0})$ alors ζ_0 est valeur propre de $\mathbf{HT}_{\lambda_0}$, de multiplicité finie m et $\operatorname{Re} \zeta_0 \leq \gamma_{\lambda_0}$. De plus, $\exists \delta > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\exists k$ ($k \leq m$) valeurs propres $\zeta_i(\lambda)$ analytiques en $(\lambda - \lambda_0)^{1/n}$, vérifiant $\zeta_i(0) = \zeta_0$, et l'on a :

$$(4,2) \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{E}(\zeta_i) = \mathbf{E}(\zeta_0) + (\lambda - \lambda_0) \mathbf{E}_1(\lambda),$$

$$(4,3) \quad \sum_{i=1}^k \dim \mathcal{E}(\zeta_i; \mathbf{HT}_{\lambda}) = \dim \mathcal{E}(\zeta_0; \mathbf{HT}_{\lambda_0}) = m,$$

où $\lambda \rightarrow \mathbf{E}_1(\lambda)$ est une fonction analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{W})$, et où n est un certain entier positif.

IV,4.2. Résolvante de $\mathbf{HT}_{\lambda}$

Si $\zeta_0 \in \sigma(\mathbf{HT}_{\lambda})$, il lui correspond $\mu_0 \in \sigma[\mathbf{G}(\lambda)]$ par l'homéomorphisme Φ . Supposons que son indice soit ν , alors μ_0 est aussi d'indice ν , d'autre part $\mu_0 \neq 0$ et l'on a l'identité :

$$(4,4) \quad \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{HT}_{\lambda}) = \mu \mathbf{1} - \mu^2 \mathbf{R}[\mu; \mathbf{G}(\lambda)]$$

pourvu que $\mu \in \rho[\mathbf{G}(\lambda)]$ et $\zeta = \alpha + \mu^{-1}$. Comme on l'a déjà vu, on peut écrire le développement de Laurent de $\mathbf{R}[\mu; \mathbf{G}(\lambda)]$ pour $\mu \in \mathcal{V}(\mu_0)$, où l'on suppose que $\mathcal{V}(\mu_0) \not\ni 0$:

$$(4,5) \quad \mathbf{R}[\mu; \mathbf{G}(\lambda)] = \sum_{n=2}^{\nu} (\mu - \mu_0)^{-n} \mathbf{B}_{-n} + (\mu - \mu_0)^{-1} \mathbf{E}_{\mathbf{G}(\lambda)}(\mu_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n (\mu - \mu_0)^n,$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty}$ convergeant avec la norme des opérateurs linéaires bornés. Maintenant, si l'on utilise $(\mu - \mu_0)^{-1} = (\zeta - \alpha)(\zeta_0 - \alpha)(\zeta_0 - \zeta)^{-1}$, et l'identité (4,4), on trouve une expression de la forme :

$$(4,6) \quad \mathbf{R}[\zeta; \mathbf{HT}_{\lambda}] = \sum_{n=2}^{\nu} (\zeta - \zeta_0)^n \mathbf{\Xi}_{-n} + (\zeta - \zeta_0)^{-1} \mathbf{E}_{\mathbf{HT}_{\lambda}}(\zeta_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n \mathbf{\Xi}_n,$$

série qui converge avec la norme des opérateurs pour $\zeta \in \mathcal{V}(\zeta_0) - \{\zeta_0\}$ et λ fixé $\in \mathcal{I}$. On peut calculer aisément les opérateurs $\mathbf{\Xi}_n$, d'une part à l'aide de (4,5), à partir de $\mathbf{B}_{-n}$ donné par [2] page 572, d'autre part à l'aide de [2] page 601 qui définit le calcul opérationnel sur les opérateurs non bornés :

$$(4,7) \quad \mathbf{\Xi}_{-n} = (\mathbf{HT}_{\lambda} - \zeta_0 \mathbf{1})^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbf{HT}_{\lambda}}(\zeta_0).$$

IV,4.3. Estimations sur la résolvante de $\mathbf{HT}_{\lambda}$

Nous allons donner dans ce paragraphe quelques estimations mettant en évidence l'aspect perturbateur de $\mathbf{H}\mathbf{A}_{\lambda}$ sur $\mathbf{H}$. Celles-ci sont donc essentiellement des conséquences des estimations (III,2,1), (III,2,4), (III,2,5) et du Lemme 1. Pour cela nous utilisons les identités :

$$(4,8) \quad \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{HT}_{\lambda}) = \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{H}) - \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{H}) \mathbf{H}\mathbf{A}_{\lambda} \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{HT}_{\lambda}),$$

$$(4,9) \quad \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{HT}_{\lambda}) = [\mathbf{1} + \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{H}) \mathbf{H}\mathbf{A}_{\lambda}]^{-1} \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{H}),$$

valables à condition que ζ ne soit ni dans $\sigma(\mathbf{HT}_{\lambda})$ ni dans $\sigma(\mathbf{H})$ et que l'opérateur écrit dans (4,9) existe. Remarquons d'abord que d'après (III,2,5) et (1,7) on a :

$$(4,10) \quad \|\mathbf{R}(\zeta; \mathbf{H}) \mathbf{H}\mathbf{A}_{\lambda}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W})} \leq C_1 C'_1(\lambda) |\zeta|^{1/2} |\operatorname{Im} \zeta|^{-1},$$

pourvu que $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$. Définissons alors la région $\mathbf{E}_2$ du plan complexe :

$$\mathbf{E}_2 = \{\zeta; \zeta \in \mathbb{C}, 2C_1 [\sup_{\lambda \in \mathcal{I}} \{C'_1(\lambda)\}] |\zeta|^{1/2} \leq |\operatorname{Im} \zeta|\}.$$

Si $\zeta \in \mathbf{E}_2$, (4,10) montre que $\mathbf{1} + \mathbf{R}(\zeta; \mathbf{H}) \mathbf{H}\mathbf{A}_{\lambda}$ est inversible dans $\mathcal{W}$, et que l'on a d'après (III,2,5) et (III,2,1), et (4,9) :

$$(4,11) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W})} \leq 2 |\Im \zeta|^{-1},$$

$$(4,12) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, \mathcal{W})} \leq 2 C_1 |\zeta|^{1/2} |\Im \zeta|^{-1}.$$

Revenons à (4,8), en utilisant (4,12), (III,2,1) et

$$\|R(\zeta; H) HQ_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{J})} \leq C'_1(\lambda) |\Im \zeta|^{-1},$$

on arrive alors à l'estimation, pour $\zeta \in E_2$:

$$(4,13) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J})} \leq 2 |\Im \zeta|^{-1},$$

enfin, à partir de (4,12) et de (III,2,4) on obtient $\forall \zeta \in E_2$:

$$(4,14) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq 2 C |\zeta| |\Im \zeta|^{-1}.$$

Maintenant d'après (4,11), (III,2,4), (III,2,5) et (4,8) on trouve

$$(4,15) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq (C/C_1 + C_1) |\zeta|^{1/2} |\Im \zeta|^{-1}, \quad \forall \zeta \in E_2,$$

et de la même manière, avec (III,2,1) on obtient $\forall \zeta \in E_2$:

$$(4,16) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})} \leq |\Im \zeta|^{-1} (1 + 2 C C'_1(\lambda) |\zeta| |\Im \zeta|^{-1}).$$

Remarquons que l'on peut obtenir une estimation voisine de (4,16) en utilisant le Lemme 1 : en effet on obtient successivement $\forall \zeta \in E_1$:

$$\|R(\zeta; H) HQ_\lambda\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma C'_2(\lambda) |\zeta|^{-1/4},$$

$$\|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})} \leq 2 \|R(\zeta; H)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})} = 2 |\Im \zeta|^{-1}$$

pourvu que ζ (défini avec E_1) vérifie $\zeta \geq [2 \gamma \{\sup_{\lambda \in I} C'_2(\lambda)\}]^4$, et l'on vérifie aisément que pour des paramètres convenables $E_1 \subset E_2$ et que si dans (4,16) on prend $\zeta \in E_1$ alors on obtient la même formule. Le Lemme 1 est quand même indispensable pour montrer, à l'aide de (4,8) et de (III,2,5):

$$\|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})} \leq C_1 |\zeta|^{1/2} |\Im \zeta|^{-1} + \gamma C'_2(\lambda) |\zeta|^{1/4} \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})},$$

c'est-à-dire $\forall \zeta \in E_1 \cap E_2$, $\exists$ une constante γ telle que $\forall \lambda \in I$ on ait:

$$(4,17) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma |\Im \zeta|^{-1/2},$$

et, à l'aide de (4,15), de la même manière

$$(4,18) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma.$$

On ne peut obtenir l'estimation dans $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_4 \cap \mathcal{W})$, par manque d'information* sur $\|R(\zeta; H)\|$ dans $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{J}, H_4 \cap \mathcal{W})$, mais cela ne nous serait pas utile pour la suite. En résumé, on a:

Lemme 5

Soit $E = E_1 \cap E_2$, alors $\exists$ une constante positive γ telle que $\forall \zeta \in E$ on ait les estimations:

$$(4,19) \quad \begin{cases} \|R(\zeta; HT_\lambda)\| \leq \gamma |\Im \zeta|^{-1} & \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{J}), \mathcal{L}(\mathcal{W}) \text{ et } \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}), \\ \|R(\zeta; HT_\lambda)\| \leq \gamma |\Im \zeta|^{-1/2} & \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{J}, \mathcal{W}), \mathcal{L}(\mathcal{W}, H_2 \cap \mathcal{W}) \text{ et } \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W}), \\ \|R(\zeta; HT_\lambda)\| \leq \gamma & \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W}) \text{ et } \mathcal{L}(\mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W}). \end{cases}$$

* Il faudrait reprendre le § III, 3.4 avec $U \in H_2^0 \cap \mathcal{J}$.

Notons que la région E est la zone extérieure à celle qui est hachurée sur la figure 6.

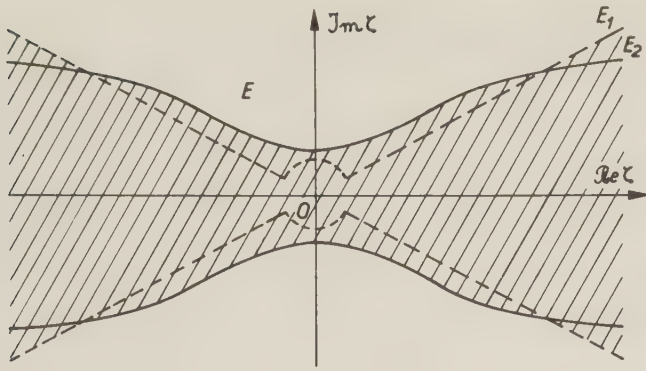


Fig. 6 - $E = E_1 \cap E_2$.

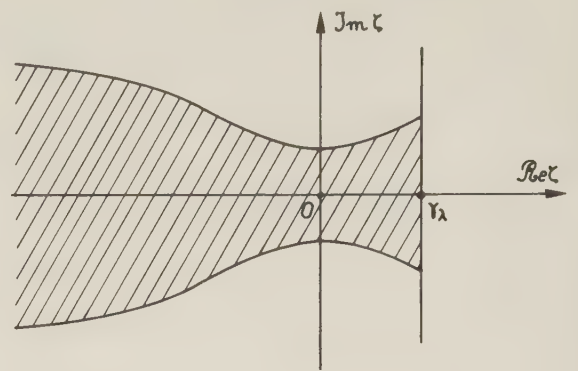


Fig. 7 - Localisation de $\sigma(HT_\lambda)$.

Remarquons enfin que (4,11), (4,13), (4,16) impliquent que E_2 est inclus dans l'ensemble résolvant $\rho(HT_\lambda)$, $\forall \lambda \in I$. Or, nous avons vu au § IV,4.1 que $\sigma(HT_\lambda)$ est situé à gauche de la droite d'abscisse γ_λ ; il en résulte donc que $\sigma(HT_\lambda)$ est situé dans la zone hachurée de la figure 7 et c'est là qu'apparaît l'aspect perturbateur de $H\alpha_\lambda$ relativement à H dont le spectre est situé sur l'axe des réels négatifs.

IV,4.4. Estimations sur la résolvante de HT_λ (suite)

Les résultats du Lemme 5 sont encore insuffisants et des estimations pour $R(\tau; HT_\lambda)$ analogues à celles du Lemme 1 (pour $R(\tau; H)$) sont nécessaires pour la suite. En appliquant le Lemme 1 dans (4,9) on obtient : $\forall \tau \in E$

$$(4,20) \quad \|R(\tau; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_1 \cap J, W)} \leq \gamma |\tau|^{-3/4},$$

ensuite, en utilisant (4,8), (4,20) et (III,2,4) on a immédiatement :

$$(4,21) \quad \|R(\tau; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_1 \cap J, H_2 \cap W)} \leq \gamma |\tau|^{-1/4},$$

où γ est une constante positive indépendante de $\tau \in E$ et de $\lambda \in I$.

Soit maintenant un arc de Jordan borné Γ dont l'image est dans le complémentaire de E et supposons que $\Gamma \cap \sigma(HT_{\lambda_0}) = \emptyset$, c'est-à-dire qu'aucun point du spectre de HT_{λ_0} n'est sur Γ . Le problème est d'estimer $R(\tau; HT_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$ et $\tau \in \Gamma$. Appliquons le Lemme 4 en nous servant du fait que $\sigma(HT_{\lambda_0})$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie et que la fermeture de Γ dans $\mathbb{C}$ est compacte. On peut alors trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}(\Gamma)$ de Γ et un voisinage ouvert $\mathcal{V}(\lambda_0)$ de λ_0 tels que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, $\sigma(HT_\lambda) \cap \mathcal{V}(\Gamma) = \emptyset$. La fermeture de Γ étant compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de disques ouverts dont la réunion des fermetures est incluse dans $\mathcal{V}(\Gamma)$ et tels que dans chacun d'eux $R(\tau; HT_\lambda)$ soit uniformément borné $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. Il en résulte qu'il existe une constante M telle que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$ et $\forall \tau \in \Gamma$ on ait $\|R(\tau; HT_\lambda)\| \leq M$ dans $\mathcal{L}(J)$, $\mathcal{L}(W)$ et $\mathcal{L}(H_2 \cap W)$. Nous aurons besoin en fait de la norme dans $\mathcal{L}(J, H_2 \cap W)$, pour l'obtenir nous utilisons le fait que HT_λ est fermé de domaine $\mathcal{D}_0(HT_\lambda)$ dense dans $J(\Omega)$ et inclus dans $H_2 \cap W$. On a alors, dans ces conditions, d'après [1] page 266 : $\forall U \in \mathcal{D}_0(HT_\lambda)$

$$\|U\|_{H_2 \cap W} \leq \gamma [\|HT_\lambda U\|_J + \|U\|_J],$$

pour une certaine constante γ . On obtient alors de manière classique

$$\|R(\tau; HT_\lambda)U\|_{H_2 \cap W} \leq \gamma [1 + (|\tau| + 1)\|R(\tau; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(J)}] \|U\|_J$$

(pas le même U que la ligne précédente !); et comme Γ est bornée, il existe une constante γ telle que $\forall \zeta \in \Gamma$ et $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$ on ait :

$$(4,22) \quad \|R(\zeta; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma.$$

Il résulte donc de ce § IV,4.4 que l'on a estimé $R(\zeta; HT_\lambda)$ dans $\mathcal{L}(H_1^\circ \cap \mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$, d'une part dans E , d'autre part sur un arc de Jordan borné du complémentaire de E puisque $\|U\|_{\mathcal{J}} \leq \|U\|_{H_1^\circ \cap \mathcal{J}}$.

IV,5. LE SOUS-ESPACE $S_p(HT_\lambda)$

IV,5.1. Définition de $S_p(HT_\lambda)$

Comme dans [2] page 1039, nous désignons $S_p(HT_\lambda)$ le sous-espace fermé engendré par les vecteurs U tels que $(\zeta I - HT_\lambda)^n U = 0$ pour un certain $\zeta \in \mathbb{C}$ et un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $\zeta \in \sigma(HT_\lambda)$, on sait que ζ est valeur propre de HT_λ et soit ν son indice (on a montré que ν est fini), on dit alors que l'espace $\{U; (\zeta I - HT_\lambda)^\nu U = 0\}$ est le sous-espace propre généralisé associé à la valeur propre ζ . Il en résulte que $S_p(HT_\lambda)$ est le sous-espace fermé engendré par les vecteurs propres généralisés de HT_λ . Nous notons $S_p^{(m)}(HT_\lambda)$, $m = 0, 1, 2$, quand la fermeture est prise respectivement dans $\mathcal{J}$, $\mathcal{W}$ ou $H_2 \cap \mathcal{W}$. Le but de ce paragraphe est de montrer que $S_p^{(0)}(HT_\lambda) = \mathcal{J}(\Omega)$, $S_p^{(1)}(HT_\lambda) = \mathcal{W}$, $S_p^{(2)}(HT_\lambda) = H_2 \cap \mathcal{W}$, c'est-à-dire que l'ensemble des vecteurs propres généralisés est complet.

IV,5.2. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Rappelons qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt T est tel que : T est linéaire borné dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et si $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ est un système orthonormal complet dans $\mathcal{H}$ alors la quantité $\|T\| = \left\{ \sum_{\alpha \in A} \|Tx_\alpha\|_{\mathcal{H}}^2 \right\}^{1/2}$ est finie [2] page 1010, et l'on dit que $\|T\|$ est la « double norme » de T .

Dans notre cas, si l'on considère l'opérateur $\mathcal{E}$, il opère de $\mathcal{J}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ et la dimension p ne dépasse pas 3. On peut donc appliquer le résultat de [1] page 211 et dire que $\mathcal{E}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{J}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Or, nous avons vu au § III,1.3 que $\mathcal{E}$ est autoadjoint et compact dans $\mathcal{J}(\Omega)$, il en résulte d'après [2] page 905 que ses vecteurs propres forment une base orthonormale de $\mathcal{J}(\Omega)$ et donc que si l'on note λ_j , $j=1, 2, \dots$ les valeurs propres de $\mathcal{E}$ répétées autant de fois que leur multiplicité, on a

$$(5,1) \quad \|\mathcal{E}\|_{\mathcal{J}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 < \infty.$$

D'autre part, nous savons que $\mathcal{E}$ est autoadjoint et compact dans $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$, ses valeurs propres étant les mêmes que dans $\mathcal{J}$, avec la même multiplicité. Il en résulte que $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2$ représente aussi la double norme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{W}$ et dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ puisque dans ces espaces on peut trouver une base orthonormale de vecteurs propres, d'après [2] page 905. On a donc :

$$(5,2) \quad \|\mathcal{E}\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}^2 = \|\mathcal{E}\|_{\mathcal{W}}^2 = \|\mathcal{E}\|_{\mathcal{J}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 < \infty,$$

et $\mathcal{E}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{J}$, $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$. Utilisons maintenant le fait que l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt d'un certain espace de Hilbert forme un idéal bilatère de l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans cet espace ([2] page 1012). Ainsi l'identité (3,3) montre que $G(\lambda)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt puisqu'il est le produit d'un opérateur borné par $\mathcal{E}$, et ceci $\forall \lambda \in I$. Or $G(\lambda)$ s'écrit aussi $-R(\alpha; HT_\lambda)$ et la résolvante de HT_λ est donc un opérateur de Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{J}$, $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$. Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème de [2] page 1042 puisque (i)

l'opérateur fermé HT_λ est tel que $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$ est dense respectivement dans $\mathring{J}$, $\mathcal{W}$, $H_2 \cap \mathcal{W}$ pour $m=0, 1, 2$, (ii) l'opérateur $R(\alpha; HT_\lambda)$ est de Hilbert-Schmidt dans les trois cas, (iii) on peut construire cinq demi-droites dont $O\eta$ (axe des imaginaires) fait partie, telles que sur chacune d'entre elles on ait

$$\|R(\tau; HT_\lambda)\| \leq \gamma |\tau|^{-1} \text{ pour } |\tau| > |\tau_0|,$$

et telles qu'elles fassent entre elles des angles inférieurs à $\pi/2$. Ce dernier point (iii) est réalisable grâce à (4,11), (4,13), (4,16) dans les trois espaces considérés. Il en résulte alors que l'on a :

Théorème 1 -

L'ensemble des vecteurs propres généralisés de l'opérateur linéaire HT_λ est complet dans les trois espaces $\mathring{J}(\Omega)$, $\mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$. Notons ce fait en l'écrivant : $S_p^{(0)}(HT_\lambda) = \mathring{J}(\Omega)$, $S_p^{(1)}(HT_\lambda) = \mathcal{W}$, $S_p^{(2)}(HT_\lambda) = H_2 \cap \mathcal{W}$.

Remarquons que, d'après l'identité

$$R(\tau; HT_\lambda) = R(\alpha; HT_\lambda) - (\tau - \alpha)R(\alpha; HT_\lambda)R(\tau; HT_\lambda)$$

$R(\tau; HT_\lambda)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt $\forall \tau \in \rho(HT_\lambda)$. De plus, l'adjoint de la résolvante de HT_λ : $[R(\tau; HT_\lambda)]^* = R(\bar{\tau}; (HT_\lambda)^*)$, et il en résulte :

$$\sigma[(HT_\lambda)^*] = \overline{\sigma(HT_\lambda)} \quad \text{et} \quad S_p^{(m)}[(HT_\lambda)^*] = S_p^{(m)}(HT_\lambda).$$

Enfin, par l'application d'un théorème classique [4] page 211, on peut décomposer, par exemple, $H_2 \cap \mathcal{W}$ (même chose pour $\mathring{J}$ et $\mathcal{W}$) de la manière suivante : $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$,

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} E_{(\mathcal{H}_\lambda)}(\tau_i) U = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij} U_{ij} \quad \text{où} \quad \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij} U_{ij} = E_{(\mathcal{H}_\lambda)}(\tau_i) U,$$

et l'on a : $A_{ij} = (U, U_{ij}^*)_{H_2 \cap \mathcal{W}}$, le système $\{U_{ij}^*\}$ vérifiant $(U_{ij}, U_{kl}^*) = \delta_{ik}^* \delta_{jl}$ et

$E_{(\mathcal{H}_\lambda)^*}(\bar{\tau}_i) U_{ij}^* = U_{ij}^*$. Les systèmes $\{U_{ij}\}$ et $\{U_{ij}^*\}$ forment deux bases biorthogonales de $H_2 \cap \mathcal{W}$,

U_{ij} (resp. U_{ij}^*) étant vecteur propre généralisé de HT_λ (resp. $(HT_\lambda)^*$) associé à la valeur propre τ_i (resp. $\bar{\tau}_i$), pour $j = 1, \dots, m_i$, m_i étant la multiplicité commune de τ_i et $\bar{\tau}_i$.

IV.6. SEMI-GROUPE $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ - FORMULATION - ESTIMATIONS

IV.6.1. Dominance dissipative de HT_λ

Si l'on utilise l'identité (1,6), le problème (1,1) se met sous la forme :

$$(6,1) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = HT_\lambda U, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec $U_0 \in \mathring{J}, \mathcal{W}$ ou $H_2 \cap \mathcal{W}$, et si l'on veut le résoudre de la même manière que le problème (III,4,1), en faisant appel au même théorème, il est nécessaire de montrer une inégalité de la même forme que (III,2,6). Pour cela il suffit de montrer une inégalité de la forme (III,1,8) dans les trois espaces considérés. Or, nous avons déjà montré (1,11), c'est-à-dire que

$$(6,2) \quad \forall U \in \mathcal{D}_0(HT_\lambda), \quad \operatorname{Re}(HT_\lambda U, U)_J \leq \gamma \|U\|_J^2,$$

où la fonction $\lambda \rightarrow \gamma_\lambda$ est continue de I dans $\mathbb{R}$. Le problème est donc de montrer une inégalité analogue

à (6,2) dans $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$.

Le raisonnement étant le même dans $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$, faisons le dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. $\forall U \in \mathcal{D}_2(H) \subset H_4 \cap \mathcal{W}$, on a $HU \in H_2 \cap \mathcal{W}$ et $H\alpha_\lambda U \in H_2^\circ \cap \mathcal{J}$; on peut alors calculer la quantité $(\Pi_0 \Delta(HT_\lambda U), \Pi_0 \Delta U)_{\mathcal{J}}$ que nous notons encore $(HT_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}}$. On a alors $\forall U \in \mathcal{D}_2(H)$:

$$(6,3) \quad (HT_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = (HU, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} - (H\alpha_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}}.$$

Or $\|H\alpha_\lambda U\|_{H_2^\circ \cap \mathcal{J}} \leq C'_3(\lambda) \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}$, d'après (1,7) et $\|\Pi_0 \Delta(H\alpha_\lambda U)\|_{\mathcal{J}} \leq \|H\alpha_\lambda U\|_{H_2^\circ \cap \mathcal{J}}$. De plus rappelons que d'après (1,6) on obtient $\forall U \in \mathcal{D}_2(H)$

$$(HU, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq -\|\mathcal{R}\|^{-1} \|\Pi_0 \Delta U\|_{\mathcal{W}}^2,$$

il en résulte dans (6,3) que $\forall U \in \mathcal{D}_2(H)$ on a :

$$\operatorname{Re} (HT_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq -\|\mathcal{R}\|^{-1} \|\Pi_0 \Delta U\|_{\mathcal{W}}^2 + C'_3(\lambda) \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \cdot \|U\|_{H_3 \cap \mathcal{W}}.$$

Mais, d'après (II,3,20) on a $\|U\|_{H_3 \cap \mathcal{W}} \leq C \|\Pi_0 \Delta U\|_{\mathcal{W}}$; de plus, de manière classique on a l'inégalité :

$$CC'_3(\lambda) \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \|\Pi_0 \Delta U\|_{\mathcal{W}} \leq \|\mathcal{R}\|^{-1} \|\Pi_0 \Delta U\|_{\mathcal{W}}^2 + 1/4 \|\mathcal{R}\| [CC'_3(\lambda)]^2 \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}^2,$$

et il en résulte $\forall U \in \mathcal{D}_2(H)$

$$(6,4) \quad \operatorname{Re} (HT_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq 1/4 \|\mathcal{R}\| [CC'_3(\lambda)]^2 \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}^2.$$

En fait $HT_\lambda U \in H_2 \cap \mathcal{J}$, mais on peut calculer $(HT_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}}$ qui est égal à $(\Pi_0 \Delta(HT_\lambda U), \Pi_0 \Delta U)_{\mathcal{J}}$. Alors, par le principe de prolongement des inégalités, vu les densités respectives de $\mathcal{D}_2(H)$ et $\mathcal{D}_2(HT_\lambda)$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ et leur inclusion dans $H_4 \cap \mathcal{W}$, on peut «prolonger» (6,4) dans $\mathcal{D}_2(HT_\lambda)$. On en déduit :

$$(6,5) \quad \forall U \in \mathcal{D}_2(HT_\lambda), \operatorname{Re} (HT_\lambda U, U)_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma_\lambda^{(2)} \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}^2,$$

où la fonction $\lambda \rightarrow \gamma_\lambda^{(2)}$ est continue de I dans $\mathbb{R}$. De la même manière, on montrerait dans $\mathcal{W}$:

$\forall U \in \mathcal{D}_1(HT_\lambda) \quad \exists$ une fonction $\lambda \rightarrow \gamma_\lambda^{(4)}$ continue de I dans $\mathbb{R}$, telle que

$$(6,6) \quad \operatorname{Re} (HT_\lambda U, U)_{\mathcal{W}} \leq \gamma_\lambda^{(4)} \|U\|_{\mathcal{W}}^2.$$

Notons que les inégalités (6,2), (6,5) et (6,6) montrent que l'opérateur $HT_\lambda - \gamma_\lambda^{(m)} \mathbf{1}$ est tel que $\forall U \in \mathcal{D}_m(HT_\lambda)$ on a

$$(6,7) \quad \operatorname{Re} ((HT_\lambda - \gamma_\lambda^{(m)} \mathbf{1})U, U) \leq 0,$$

le produit scalaire étant pris respectivement dans $\mathcal{J}$, $\mathcal{W}$, $H_2 \cap \mathcal{W}$ pour $m = 0, 1, 2$ ($\gamma_\lambda^{(0)} \equiv \gamma_\lambda$). C'est à cause de (6,7) que nous disons que l'opérateur HT_λ est à «dominance dissipative».

IV,6.2. Définition du semi-groupe $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$

Procédons de la même manière qu'au § III,4.1, afin de résoudre le système (1,1), mis sous la forme (6,1). Pour cela il nous faut montrer une estimation du type de (III,2,6) pour $R(\tau; HT_\lambda)$. Nous pouvons alors faire le même raisonnement qu'au § III,2.2, car nous savons que $\sigma(HT_\lambda)$ est discret et que si $\tau \in \sigma(HT_\lambda)$

alors $\operatorname{Re} \tau \leq \inf(\gamma_\lambda^{(0)}, \gamma_\lambda^{(4)}, \gamma_\lambda^{(2)})$ (on l'a montré au § IV,4.1 pour $\gamma_\lambda^{(0)}$, le raisonnement est le même pour $\gamma_\lambda^{(4)}$ et $\gamma_\lambda^{(2)}$). Alors, directement à partir de (6,2), (6,6) ou (6,5), on obtient :

$\forall \tau$ tel que $\operatorname{Re} \tau > \gamma_\lambda^{(m)}$

$$(6,8) \quad \|R(\tau; HT_\lambda)\| \leq [\operatorname{Re} \tau - \gamma_\lambda^{(m)}]^{-1},$$

la norme étant prise respectivement dans $\mathcal{L}(\dot{J}), \mathcal{L}(\mathcal{W}), \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$ pour $m = 0, 1, 2$.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème de Hille-Yosida-Phillips [2] page 626 puisque HT_λ est fermé dans $\dot{J}, \mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$, que $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$ est dense respectivement dans ces espaces et que (6,8) est vérifié. Il en résulte :

Théorème 2 -

L'opérateur HT_λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans $\dot{J}(\Omega), \mathcal{W}$ et $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, noté $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$. Il vérifie l'estimation

$$(6,9) \quad \|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)\| \leq e^{\gamma_\lambda^{(m)} t}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme dans $\mathcal{L}(\dot{J}), \mathcal{L}(\mathcal{W}), \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$ respectivement pour $m = 0, 1, 2$. Enfin, $U(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0$ est la solution de (6,1) dans $\dot{J}(\Omega)$ si $U_0 \in \dot{J}(\Omega)$, dans $H_m(\Omega) \cap \mathcal{W}$ ($m = 1, 2$) si $U_0 \in H_m \cap \mathcal{W}$.

IV,6.3. Formulation explicite de $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$

Procédons de manière analogue à ce que nous avons fait au § III,4.2. Pour cela, nous pourrions remarquer que $R(\zeta; HT_\lambda)$ vérifie les conditions du corollaire 2.1 de l'article de A. Pazy [40], grâce au Lemme 5 et à (6,8) et nous en déduirions que $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ est un C^∞ semi-groupe dans $\dot{J}, \mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$; mais nous préférons agir directement, ce qui permet de dégager une formulation explicite qui nous sera bien utile plus loin.

Partons du fait que d'après [4] page 349, on peut écrire pour $t > 0$

$$(6,10) \quad \forall U \in \mathcal{D}_m(HT_\lambda), \quad \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\zeta t} R(\zeta; HT_\lambda) U d\zeta,$$

où γ est choisi $> \gamma_\lambda^{(m)}$. Ensuite, définissons un nouveau contour Λ_2 de $\mathbb{C}$, réunion de deux demi-droites symétriques par rapport à l'axe réel, entièrement situées dans E du côté des parties réelles négatives, et de trois segments disposés comme l'indique la figure 8. Alors, grâce aux estimations (6,8) ($\text{Re } \zeta > \gamma_\lambda^{(m)}$) et

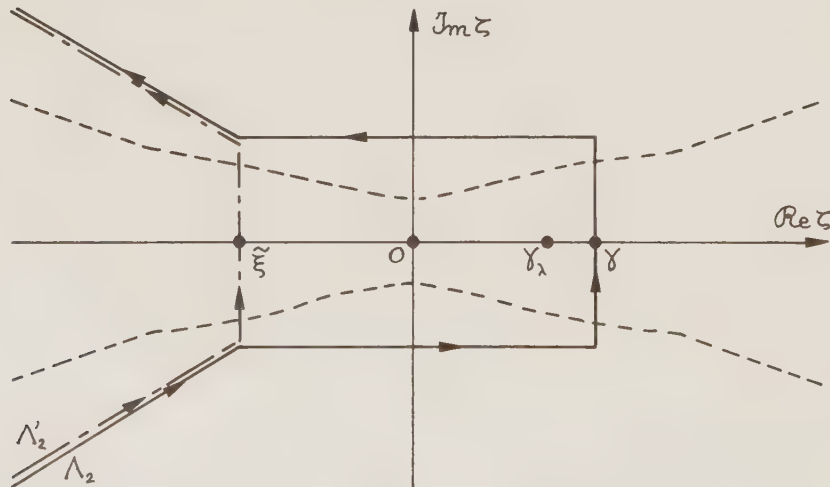


Fig. 8 - Contours Λ_2 et Λ'_2 . E est délimitée par le pointillé.

(4,11), (4,13), (4,16) pour $\zeta \in E$, on peut remplacer le contour d'intégration dans (6,10) par Λ_2 et étendre la définition de (6,10) à $\dot{J}(\Omega), \mathcal{W}$, ou $H_2 \cap \mathcal{W}$ respectivement pour $m = 0, 1$ ou 2 puisque $\mathcal{D}_m(HT_\lambda)$

est dense. Donc, pour $t > 0$, l'opérateur

$$(6,11) \quad U \rightarrow \mathcal{I}(t; HT_\lambda)U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_2} e^{\tau t} R(\tau; HT_\lambda)U d\tau$$

est dans $\mathcal{L}(\mathring{J}) \cap \mathcal{L}(W) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap W)$. Considérons le, alors, dans $\mathring{J}(\Omega)$, en utilisant (4,22) et (4,14) on s'aperçoit que pour $t > 0$, $\mathcal{I}(t; HT_\lambda) \in \mathcal{L}(\mathring{J}, H_2 \cap W)$, c'est-à-dire que $\forall U \in \mathring{J}(\Omega)$, $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)U \in \mathcal{D}_0(HT_\lambda)$; il en résulte de la même manière qu'au § III,4.2 que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'opérateur

$$\frac{d^n \mathcal{I}(t; HT_\lambda)}{dt^n} = (HT_\lambda)^n \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$$

est borné dans $\mathring{J}(\Omega)$ et continu [avec la norme de $\mathcal{L}(\mathring{J})$] par rapport à t pour $t \geq t_0 > 0$, $\forall t_0$ fixé.

IV,6.4. Formulation explicite plus élaborée

Nous allons utiliser dans ce paragraphe, la nature du spectre de HT_λ et sa localisation (Fig. 7). Chaque point τ_n de $\sigma(HT_\lambda)$ correspond à un pôle d'ordre ν_n (indice de τ_n) pour la résolvante de HT_λ . C'est pourquoi, si l'on déforme le contour Λ_2 pour qu'il devienne Λ'_2 (Fig. 8), il faudra considérer tous les résidus des pôles situés entre $\tilde{\xi}$ et γ . Nous savons que $\sigma(HT_\lambda)$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie, d'où, pour $\lambda_0 \in I$ on est certain qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres $\tau_1, \dots, \tau_N$, telles que $\tilde{\xi} < \operatorname{Re} \tau_i \leq \gamma_{\lambda_0}$ où $\tilde{\xi} < 0$, ceci grâce au fait que $\sigma(HT_{\lambda_0})$ est borné en ordonnée pour une abscisse fixée (Fig. 7). Par application du Lemme 4, on sait qu'il existe alors un voisinage $\mathcal{V}(\lambda_0)$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, $\sigma(HT_\lambda)$ n'a aucun point d'abscisse $\tilde{\xi}$ et il existe pour chaque n ($n=1, \dots, N$) un nombre k_n de valeurs propres τ_{ni} , telles que $\tau_{ni}(\lambda_0) = \tau_n$, $i=1, \dots, k_n$, les fonctions $\lambda \rightarrow \tau_{ni}(\lambda)$ vérifiant les propriétés décrites au Lemme 4. Notons ν_{ni} l'indice de τ_{ni} et utilisons (4,6), (4,7) pour extraire les résidus des pôles compris entre $\tilde{\xi}$ et γ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. On obtient :

$$(6,12) \quad \begin{cases} \mathcal{I}(t; HT_\lambda)U = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{k_n} e^{\tau_{ni} t} \mathfrak{G}(\tau_{ni}; t)U + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda'_2} e^{\tau t} R(\tau; HT_\lambda)U d\tau, \\ \text{avec } \mathfrak{G}(\tau_{ni}; t) = \sum_{p=0}^{\nu_{ni}-1} \frac{t^p}{p!} (HT_\lambda - \tau_{ni} 1)^p E_{(HT_\lambda)}(\tau_{ni}). \end{cases}$$

Dans cette expression, on remarque que si $\nu_{ni} = 1$, alors $\mathfrak{G}(\tau_{ni}; t) \equiv E_{(HT_\lambda)}(\tau_{ni})$, c'est-à-dire que le coefficient de $e^{\tau_{ni} t}$ dans (6,12) ne dépend plus de t . Considérons maintenant l'intégrale qui intervient dans (6,12) et notons :

$$(6,13) \quad P_\lambda = 1 - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{k_n} E_{(HT_\lambda)}(\tau_{ni})$$

l'opérateur projection associé à la partie du spectre à gauche de $\tilde{\xi}$. Nous allons montrer que

$$(6,14) \quad P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda)U = \mathcal{I}(t; HT_\lambda)P_\lambda U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda'_2} e^{\tau t} R(\tau; HT_\lambda)U d\tau.$$

Pour cela, il suffit de montrer que

$$(6,15) \quad \frac{1}{2\pi i} E_{(HT_\lambda)}(\tau_{ni}) \int_{\Lambda'_2} e^{\tau t} R(\tau; HT_\lambda)U d\tau = 0,$$

et que

$$(6,15)' \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda'_2} e^{\tau t} R(\tau; HT_\lambda) E_{(HT_\lambda)}(\tau_{ni})U d\tau = 0.$$

Montrons donc (6,15); (6,15)' s'obtiendrait de manière tout à fait analogue. Remarquons d'abord, que d'après [2] page 601, nous pouvons écrire :

$$(6,16) \quad E_{(HT_\lambda)}(\tau_{ni}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{ni}} e(\tau; \tau_{ni}) R(\tau; HT_\lambda) d\tau,$$

où $e(\zeta; \zeta_{ni})$ est une fonction de ζ qui vaut 1 dans un voisinage de ζ_{ni} contenant la courbe de Jordan fermée Γ_{ni} entourant ζ_{ni} , et 0 en dehors d'un voisinage de ζ_{ni} ne coupant pas Λ'_2 et ne contenant aucun autre point de $\sigma(\text{HT}_\lambda)$. L'existence de tels voisinages est rendue possible par le Lemme 4. Soit donc à calculer :

$$I_1 = \sum_{(\text{HT}_\lambda)} (\zeta_{ni}) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda'_2} e^{\zeta t} R(\zeta; \text{HT}_\lambda) d\zeta,$$

et utilisons l'identité

$$R(\zeta; \text{HT}_\lambda) R(\zeta'; \text{HT}_\lambda) = (\zeta' - \zeta)^{-1} [R(\zeta; \text{HT}_\lambda) - R(\zeta'; \text{HT}_\lambda)].$$

On obtient successivement :

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{ni}} \int_{\Lambda'_2} e(\zeta; \zeta_{ni}) e^{\zeta' t} R(\zeta; \text{HT}_\lambda) R(\zeta'; \text{HT}_\lambda) d\zeta d\zeta',$$

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda'_2} e(\zeta'; \zeta_{ni}) e^{\zeta' t} R(\zeta'; \text{HT}_\lambda) d\zeta' + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{ni}} e(\zeta; \zeta_{ni}) \left[\int_{\Lambda'_2} e^{\zeta' t} (\zeta - \zeta')^{-1} d\zeta' \right] R(\zeta; \text{HT}_\lambda) d\zeta.$$

Dans la dernière équation, la première intégrale est identiquement nulle car $e(\zeta'; \zeta_{ni}) = 0$ pour $\zeta' \in \Lambda'_2$. D'autre part, on a aisément :

$$\int_{\Lambda'_2} e^{\zeta' t} (\zeta - \zeta')^{-1} d\zeta' = \begin{cases} -e^{\zeta t} & \text{si } \text{Re } \zeta < \tilde{\xi}, \\ 0 & \text{si } \text{Re } \zeta > \tilde{\xi}. \end{cases}$$

Il en résulte que l'intégrand, dans la deuxième intégrale, est identiquement nul $\forall \zeta$. D'où $I_1 = 0$ et c'est ce qu'il fallait montrer pour arriver à (6,14).

IV,6.5. Estimations pour $\mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)$ et $P_\lambda \mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)$

Nous allons employer les formes explicites (6,11) et (6,14) pour aboutir à des estimations qui nous seront fort utiles plus tard. La méthode employée étant la même pour traiter $\mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)$ et $P_\lambda \mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)$, nous ne la décrivons que pour un seul des deux cas. Remarquons d'abord que pour $0 \leq t \leq T$ fixé, on a $\|P_\lambda \mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)\| \leq C t e$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{J})$, $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$, puisque P_λ est borné et que $\mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)$ est borné par $\exp(\gamma_\lambda^{(m)} t)$. Il s'agit donc à présent de trouver une estimation plus intéressante que $\exp(\gamma_\lambda^{(m)} t)$ quand $t > T$. Pour cela, il suffit d'utiliser les estimations (4,13), (4,11) et (4,16) pour $\zeta \in \Lambda'_2 \cap E$ et l'estimation $\|R(\zeta; \text{HT}_\lambda)\| \leq M$ pour $\zeta \in \Lambda'_2 \cap C E$ trouvée au § IV,4.4, puisque $\Lambda'_2 \cap C E$ vérifie bien les conditions de l'arc Γ dans le paragraphe en question. En utilisant de plus :

$$\|P_\lambda \mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda'_2} e^{\xi t} \|R(\zeta; \text{HT}_\lambda)\| |d\zeta|,$$

où $\xi = \text{Re } \zeta$, sachant que $t \geq T$, on obtient aisément l'estimation :

$$(6,17) \quad \|P_\lambda \mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)\| \leq \gamma e^{\xi t}, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0),$$

pour une certaine constante γ , la norme étant prise dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. L'inégalité (6,17) présente l'intérêt de mettre en évidence le fait que si $\tilde{\xi} < 0$, alors quand $t \rightarrow \infty$ $\|P_\lambda \mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)\| \rightarrow 0$ exponentiellement.

Pour préciser l'estimation de $\|\mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)\|$, il est nécessaire de faire intervenir la fonction $\lambda \rightarrow \xi_0(\lambda) = \sup_{\zeta \in \sigma(\text{HT}_\lambda)} \{\text{Re } \zeta\}$. On définit bien ainsi une fonction, puisque $\sigma(\text{HT}_\lambda)$ est borné à droite et qu'il n'admet, d'après sa localisation (Fig. 7) qu'un nombre fini de points situés entre deux droites d'abscisses fixées. Soit alors, un nombre ε positif arbitraire, et posons $\xi_1 = \xi_0(\lambda_0) + \varepsilon$, alors d'après le Lemme 4, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\lambda_0)$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, $\sigma(\text{HT}_\lambda)$ soit à gauche de la droite d'abscisse $\xi_1 - \varepsilon/2$. On montre ensuite de la même manière que précédemment l'estimation :

$$(6,18) \quad \|\mathcal{Z}(t; \text{HT}_\lambda)\| \leq \gamma e^{\xi_1 t}, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0),$$

la constante γ dépendant évidemment du ε choisi plus haut. En fait, nous aurions pu déduire (6,18) de (6,17) et (6,12) de manière immédiate.

Cherchons maintenant des estimations dans $\mathcal{L}(H_1^0 \cap J, H_2 \cap \mathcal{W})$ comme au Lemme 3. Pour cela, il suffit d'appliquer l'estimation (4,21) pour $\tau \in \Lambda'_2 \cap E$ et (4,22) pour $\tau \in \Lambda'_2 \cap C$, et l'on obtient, $\forall t > 0$

$$(6,19) \quad \|P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_1^0 \cap J, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma (1+t^{-3/4}) e^{\tilde{\xi}_4 t},$$

$$(6,20) \quad \|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_1^0 \cap J, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma (1+t^{-3/4}) e^{\xi_4 t},$$

pour une certaine constante positive γ indépendante de $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. Ces inégalités (6,19) et (6,20) sont absolument essentielles pour l'étude du problème non linéaire, le trait essentiel étant la présence du facteur $t^{-3/4}$ qui est intégrable au voisinage de $t=0$ et l'on voit mieux l'apport de la formule (4,21) relativement au Lemme 5. En fait, grâce au Lemme 5, on montre de la même manière :

$$(6,21) \quad \|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)\| \leq \gamma (1+t^{-1/2}) e^{\xi_4 t}$$

la norme étant prise dans $\mathcal{L}(J, \mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}, H_2 \cap \mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})$, et

$$(6,22) \quad \|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)\| \leq \gamma (1+t^{-1}) e^{\xi_4 t}$$

la norme étant prise dans $\mathcal{L}(J, H_2 \cap \mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}, H_3 \cap \mathcal{W})$, ainsi que les estimations analogues pour $P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ avec $\tilde{\xi}_4$ à la place de ξ_4 . On remarque alors que (6,22) est plus général que (6,20), mais que t^{-1} n'est pas intégrable au voisinage de $t=0$, donc inutilisable pour la suite. De même (6,21) est plus restrictif que (6,20) et applique, par exemple, $\mathcal{W}$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ ce qui, pour nous, sera insuffisant. Remarquons encore en passant que (4,20) nous permet d'obtenir :

$$(6,23) \quad \|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_1^0 \cap J, \mathcal{W})} \leq \gamma (1+t^{-1/4}) e^{\xi_4 t},$$

et l'estimation analogue pour $P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$.

IV,6.6. Solution du problème linéaire

Revenons au système (1,1), nous avons vu qu'on peut le mettre sous la forme (6,1), et le théorème 2 nous a donné la solution. C'est alors que nous pouvons exploiter les estimations trouvées au § IV,6.5. Etudions en particulier le problème suivant :

$$(6,24) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta \mathcal{R}^{-1} U - (V_0 \cdot \nabla U + B_0 U) - \nabla p + f, \\ \nabla \cdot U^{(p)} = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

et U vérifie $U|_{\partial\Omega} = 0$ dans le cas (i), ou $U|_{\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1} = 0$ et des conditions de périodicité (Ω) dans le cas (ii). Supposons que $U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}$ et que f soit tel que $\Pi_0 f \in C^0([0, \infty[; H_1^0 \cap J)$ comme au § III,4.3, alors résoudre (6,24), c'est aussi résoudre

$$(6,25) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = HT_\lambda U + \Pi_0 f, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

et l'on peut alors exprimer la solution sous la forme :

$$(6,26) \quad U(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0 + \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) \Pi_0 f(\tau) d\tau.$$

De la même manière qu'au § III, 4.3 on montre grâce à (6,20) que

$$U \in C^0([0, \tau]; H_2 \cap \mathcal{W}), \forall \tau > 0,$$

et que si $\xi_0(\lambda) < 0$ alors $U \in C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$. De plus, si $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, alors à partir de (6,20) avec $\xi_1 < 0$ (possible puisque $\xi_0 < 0$), il est facile de montrer que $\|U(t)\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

En effet : $\|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow \infty$ et quant à l'intégrale, on peut l'écrire pour $t \geq T$ (on note $\mathcal{I}(t) \equiv \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$) :

$$(6,27) \quad \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau) \Pi_0 f(\tau) d\tau = \mathcal{I}(t-T) \int_0^T \mathcal{I}(T-\tau) \Pi_0 f(\tau) d\tau + \int_T^t \mathcal{I}(t-\tau) \Pi_0 f(\tau) d\tau.$$

De plus, on a

$$\left\| \int_0^T \mathcal{I}(T-\tau) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma \|\Pi_0 f\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}},$$

$$\|\mathcal{I}(t-T)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma e^{\xi_1(t-T)} \text{ avec } \xi_1 < 0,$$

d'où, le premier terme du second membre de (6,27) tend exponentiellement vers 0 (T fixé) et il reste à estimer l'intégrale prise de T à t . Or, puisque $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, on sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists T_1$ tel que $\sup_{t \geq T_1} \|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}} \leq \varepsilon$; d'autre part $\forall t > T_0$ on a

$$\|\mathcal{I}(t; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_1^0 \cap \mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma e^{\xi_1 t}.$$

D'où pour $T = \sup(T_0, T_1)$, on a

$$\left\| \int_T^t \mathcal{I}(t-\tau) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma \varepsilon |\xi_1|^{-1}.$$

on en conclut donc que $\|U(t)\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. On procéderait de la même manière pour montrer la décroissance exponentielle de $U(t)$ dans le cas où $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}}$ décroît exponentiellement.

IV,7. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\lambda \rightarrow \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$

IV,7.1. Propriétés globales

Cherchons à appliquer le théorème de [2] page 631 qui donne une condition suffisante pour une perturbation d'un générateur infinitésimal afin que l'opérateur perturbé engendre encore un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés.

Soit $\lambda_0 \in I$, nous allons étudier la fonction $\lambda \rightarrow \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. Remarquons d'abord que

$$HT_\lambda = HT_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) HA_1$$

$$\text{et que } \mathcal{D}_m(HT_\lambda) = \mathcal{D}_m(HT_{\lambda_0}) \Rightarrow \mathcal{D}_m(HA_1) \supseteq \mathcal{D}_m(HT_{\lambda_0}).$$

D'autre part l'opérateur HA_1 est fermé dans $\mathring{J}(\Omega), \mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$, puisque c'est le produit de A_1 borné par H fermé dans ces espaces. Enfin, on a $\|HA_1\| \leq c'$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathring{J}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_1^0 \cap \mathring{J}) \cap \mathcal{L}(H_3 \cap \mathcal{W}, H_2^0 \cap \mathring{J})$ et il résulte, d'après (6,21) que l'on a :

$$(7,1) \quad \|HA_1 \mathcal{I}(t; HT_{\lambda_0})\| \leq \gamma c' (1+t^{-1/2}) e^{\xi_1 t},$$

$\forall t > 0$, dans $\mathcal{L}(\mathring{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}, H_1^0 \cap \mathring{J}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_2^0 \cap \mathring{J})$. Mais nous savons que pour $t > 0, \forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$ (par exemple), alors $\mathcal{I}(t; HT_{\lambda_0})U \in \mathcal{D}_2(HT_{\lambda_0})$, d'où $HA_1 \mathcal{I}(t; HT_{\lambda_0})U \in H_2 \cap \mathcal{W}$ (même raisonnement dans $\mathring{J}$ ou $\mathcal{W}$). Or on a $\|\cdot\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \|\cdot\|_{H_2^0 \cap \mathring{J}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}} \leq \|\cdot\|_{H_1^0 \cap \mathring{J}}$; il en

résulte que $\forall t > 0$, (7,1) est encore réalisé dans $\mathcal{L}(\mathring{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. La dernière condition à vérifier pour l'application du théorème est que l'intégrale $\int_0^1 \gamma_C'(1+t^{-1/2}) e^{\mathring{\mathcal{E}}_t t} dt$ soit finie, ce qui est effectivement réalisé. D'où, nous pouvons affirmer que le semi-groupe $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ peut s'écrire sous la forme suivante dans $\mathcal{L}(\mathring{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$:

$$(7,2) \quad \mathcal{I}(t; HT_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{G}_n(t),$$

avec

$$(7,3) \quad \mathcal{G}_n(t) U = - \int_0^t \mathcal{I}(t-s; HT_{\lambda_0}) H A_1 \mathcal{G}_{n-1}(s) U ds,$$

la série étant absolument convergente, uniformément par rapport à t dans tout intervalle fini, $\forall \lambda \in I$. La fonction $t \rightarrow \mathcal{G}_n(t)U$ est continue pour $t \geq 0$, $\forall n \geq 0$.

La méthode employée ici nous permet d'obtenir rapidement et sans calculs le développement (7,2) $\forall \lambda \in I$ pour λ_0 fixé dans I , mais, nous aurons besoin de connaître le comportement des fonctions $t \rightarrow \mathcal{G}_n(t)$. C'est pourquoi il est nécessaire de faire une étude directe sur la forme explicite de $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$.

Remarquons enfin que d'après (6,13) et le Lemme 4, la fonction $\lambda \rightarrow P_\lambda$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathring{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. Il en résulte, d'après (7,2) que la fonction $\lambda \rightarrow P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathring{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$.

IV,7.2. Propriétés des termes du développement en série du semi-groupe au voisinage de $\lambda_0 \in I$

Nous utilisons les représentations explicites (6,11) de $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ et (6,14) de $P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ et le développement de Taylor au voisinage de λ_0 de la résolvante $R(\tau; HT_\lambda)$. On a l'identité :

$$(7,4) \quad R(\tau; HT_\lambda) = R(\tau; H) - R(\tau; H) H A_\lambda R(\tau; HT_\lambda)$$

$$\text{et } \frac{d^n A_\lambda}{d\lambda^n} = 0 \quad \text{dès que } n \geq 2 \quad \text{dans } \mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W}) \bigcap_{m=1}^n \mathcal{L}(H_m \cap \mathcal{W}, H_{m+1} \cap \mathcal{W}).$$

On obtient alors, en dérivant (7,4) n fois ($n \geq 1$):

$$(7,5) \quad \frac{d^n}{d\lambda^n} [R(\tau; HT_\lambda)] = -n R(\tau; H) H A'_\lambda \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} [R(\tau; HT_\lambda)] - R(\tau; H) H A_\lambda \frac{d^n}{d\lambda^n} [R(\tau; HT_\lambda)].$$

D'autre part, on sait qu'il existe une constante C' telle que $\forall \lambda \in I$ on ait $\|H A_\lambda\| + \|H A'_\lambda\| \leq C'$, les normes étant prises dans $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathring{J}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W}, H_1 \cap \mathring{J}) \cap \mathcal{L}(H_3 \cap \mathcal{W}, H_2 \cap \mathring{J})$; alors si l'on définit la région E_2 avec la constante C' à la place de $C'_1(\lambda)$, comme au § IV,4.3, on obtient en premier lieu $\forall \tau \in E_1 \cap E_2 = E$:

$$\|R(\tau; H) H A_\lambda\| \leq 1/2, \quad \|R(\tau; H) H A'_\lambda\| \leq 1/2,$$

les normes étant prises dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})$. L'opérateur $1 + R(\tau; H) H A_\lambda$ est donc inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et d'après (7,5) on obtient :

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} [R(\tau; HT_\lambda)] \right\|_{\mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W})} \leq n \left\| \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} [R(\tau; HT_\lambda)] \right\|_{\mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W})},$$

et ceci $\forall \tau \in E$. Il en résulte immédiatement $\forall \tau \in E, n \geq 1$:

$$(7,6) \quad \left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} [R(\tau; HT_\lambda)] \right\|_{\mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W})} \leq n! \|R(\tau; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathring{J}, \mathcal{W})} \leq n! \gamma |\Im \tau|^{-1/2},$$

d'après le Lemme 5. Maintenant, grâce à (III,2,4) on peut trouver une constante C'' telle que $\forall \lambda \in I$ on ait pour $\zeta \in E$:

$$(7,7) \quad \|R(\zeta; H) H \alpha_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq C'' ,$$

et

$$\|R(\zeta; H) H \alpha'_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq C'' .$$

Les inégalités (7,6) et (7,7) appliquées à (7,5), nous donnent :

$$(7,8) \quad \left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} [R(\zeta; H T_\lambda)] \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq 2C'' \gamma |\operatorname{Im} \zeta|^{-1/2} n! ,$$

ceci $\forall \lambda \in I$, $\forall \zeta \in E$ et $n \geq 1$. Soit alors $\lambda_0 \in I$ on peut écrire pour $\zeta \in E$:

$$(7,9) \quad R(\zeta; H T_\lambda) = R(\zeta; H T_{\lambda_0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [R(\zeta; H T_{\lambda_0})] ,$$

et grâce à (7,8), la série est absolument convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$ pour $|\lambda - \lambda_0| < 1$.

Il reste donc à étudier les cas $\zeta \in \Lambda_2 \cap E$ et $\zeta \in \Lambda'_2 \cap E$ pour majorer les intégrales sur les contours Λ_2 et Λ'_2 . Pour ce faire, nous utilisons le lemme de [2] page 585, sachant que la fonction $\lambda \rightarrow G(\lambda)$ est analytique pour $\lambda \in \mathcal{V}(I)$. Il en résulte qu'il existe $\mathcal{V}(\lambda_0)$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, $\{\Lambda_2 \cap E\} \cup \{\Lambda'_2 \cap E\}$ soit strictement inclus dans $\rho(H T_\lambda)$ et que la fonction $\lambda \rightarrow R[\mu; G(\lambda)]$ y soit analytique pour $\zeta = \alpha + \mu^{-1} \in \{\Lambda_2 \cap E\} \cup \{\Lambda'_2 \cap E\}$. Or, d'après (4,4) cela revient à dire que la fonction $\lambda \rightarrow R(\zeta; H T_\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$ pour $\zeta \in \{\Lambda_2 \cap E\} \cup \{\Lambda'_2 \cap E\}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. D'autre part, nous avons vu au § IV,3.2 que $\lambda \rightarrow G(\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{V}(I)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$, et comme $G(\lambda) = -R(\alpha; H T_\lambda)$, on a encore l'identité

$$R(\zeta; H T_\lambda) = (\zeta - \alpha) R(\zeta; H T_\lambda) G(\lambda) - G(\lambda)$$

qui entraîne que pour $\zeta \in \{\Lambda_2 \cap E\} \cup \{\Lambda'_2 \cap E\}$, la fonction $\lambda \rightarrow R(\zeta; H T_\lambda)$ est analytique pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$, et l'on remarque que sur cet ensemble $\zeta - \alpha$ est borné en module ce qui nous permet de borner la partie d'intégrale (6,11) prise sur $\Lambda_2 \cap E$ et la partie de celle de (6,14) prise sur $\Lambda'_2 \cap E$. A l'aide de cette remarque et de (7,8), on obtient aisément les estimations

$$(7,10) \quad \begin{cases} \|\mathcal{G}_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma \delta^{-n} (1+t^{-1/2}) e^{\xi_1 t} , \\ \|\tilde{\mathcal{G}}_n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{J}, H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma \delta^{-n} (1+t^{-1/2}) e^{\tilde{\xi} t} , \end{cases}$$

pour $n \geq 1$, où $\tilde{\mathcal{G}}_n(t)$ est l'opérateur, facteur de $(\lambda - \lambda_0)^n$, dans le développement de $P_\lambda \mathcal{X}(t; H T_\lambda)$. Le nombre $\delta > 0$ représente le rayon de convergence de la série entière en $\lambda - \lambda_0$ représentant $R(\zeta; H T_\lambda)$ pour $\zeta \in \Lambda_2 \cup \Lambda'_2$. Finalement, les différents termes des développements en $(\lambda - \lambda_0)$, pour $n \geq 1$, ont une singularité en $t=0$ atténuée relativement au terme $n=0$, mais leur comportement quand $t \rightarrow \infty$ est le même.

IV,7.3. Problème de stabilité linéaire. λ critique

Le système linéaire (1,1) n'est autre, en fait, que celui qu'ont étudié la plupart des auteurs pour la théorie linéaire de la stabilité. Nous avons vu qu'il est possible de l'écrire sous la forme $\frac{\partial U}{\partial t} = H T_\lambda U$ et de chercher une solution $U(t)$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ qui vérifie $U(0) = U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}$. Ce problème est résolu par le

Théorème 2, mais il s'agit en fait de savoir si, quand on perturbe à $t=0$ par U_0 , la norme de la solution, $\|U(t)\|_{H_2 \cap W}$ croît ou décroît quand $t \rightarrow \infty$. C'est pourquoi nous avons introduit au § IV,6.5 la fonction $\lambda \rightarrow \xi_0(\lambda) = \sup_{\zeta \in \sigma(HT_\lambda)} \{ \operatorname{Re} \zeta \}$ qui nous permet de préciser la stabilité de $U(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0$.

En effet si $\xi_0(\lambda) < 0$ alors (6,17) montre que $\|U(t)\|_{H_2 \cap W} \rightarrow 0$ exponentiellement, et il y a donc « stabilité linéaire » dans ce cas. Si $\xi_0(\lambda) > 0$, alors $\exists$ des valeurs propres $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ telles que $\operatorname{Re} \zeta_i > 0$, $i=1, \dots, N$, qui correspondent à des modes instables. Si on les isole de manière à employer la formulation (6,12) de $\mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0$ avec $\tilde{\xi} < 0$ défini comme au § IV,6.4, alors on voit que si U_0 est tel que pour un certain i , $1 \leq i \leq N$, on a $\sum_{(HT_\lambda)} (\zeta_i) U_0 \neq 0$ la norme $\|U(t)\|_{H_2 \cap W}$ tend exponentiellement vers l'infini. D'une manière générale, si $\xi_0(\lambda) > 0$ on sait qu'il existe des U_0 tels que $\|U(t)\|_{H_2 \cap W} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, on dit alors qu'il y a « instabilité linéaire ». Mais il faut remarquer que si U_0 est tel que $\sum_{(HT_\lambda)} (\zeta_i) U_0 = 0$, pour $i=1, \dots, N$, alors $\|U(t)\|_{H_2 \cap W}$ tend exponentiellement vers 0, bien qu'il y ait instabilité.

Notons en passant la dépendance en λ de $U(t)$. D'après (7,2) et (7,10), on sait que

$$(7,11) \quad \|\mathcal{G}_n(t)\|_{\mathcal{L}_0(H_2 \cap W)} \leq \gamma \delta^{-n} e^{\xi_1 t},$$

il en résulte que $U(t)$ dépend analytiquement de λ au voisinage de λ_0 arbitraire dans I , chaque terme du développement de Taylor en $(\lambda - \lambda_0)$ tendant exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ si $\xi_0(\lambda_0) < 0$.

Il reste enfin à étudier le cas $\xi_0(\lambda) = 0$ qui signifie l'existence de N valeurs propres $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ telles que $\operatorname{Re} \zeta_i = 0$, $i=1, \dots, N$. Pour conclure sur la stabilité dans ce cas il est nécessaire de savoir quel est l'indice de chaque ζ_i . Si ces indices sont tous égaux à 1, il y a « stabilité neutre », c'est-à-dire que $\|U(t)\|_{H_2 \cap W}$ ne croît pas quand $t \rightarrow \infty$, mais il ne décroît pas forcément non plus comme le montre (6,12). En effet on peut trouver U_0 tel que $\sum_{(HT_\lambda)} (\zeta_i) U_0 \neq 0$, et (6,12) montre que ce morceau de décomposition de U_0 reste invariant en norme avec t . Si, au contraire, l'un des indices de ces ζ_i , ν_i par exemple, est supérieur à 1, alors il y a « instabilité linéaire » car $\exists U_0$ tel que $\|U(t)\|_{H_2 \cap W}$ ait une croissance polynomiale en t , d'après (6,12).

En conclusion, nous sommes amené à définir un nombre λ « critique » : λ_c .

DÉFINITION : λ_c est la plus petite valeur positive de λ pour laquelle $\xi_0(\lambda)$ s'annule.

A cette définition nous adjoignons les hypothèses suivantes :

$$(7,12) \quad \xi_0(0) < 0, \text{ et pour } \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c), \lambda > \lambda_c \text{ on a } \xi_0(\lambda) > 0.$$

Cela revient à dire que pour $\lambda \in [0, \lambda_c[$, $\xi_0(\lambda)$ reste < 0 , c'est-à-dire que $\sigma(HT_\lambda)$ reste à gauche de l'axe des imaginaires du plan complexe, et quand λ traverse la valeur λ_c alors $\xi_0(\lambda)$ change de signe. Il en résulte que pour $\lambda = \lambda_c$, il existe $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ tels que $\zeta_i \in \sigma(HT_{\lambda_c})$ et $\operatorname{Re} \zeta_i = 0$, $i=1, \dots, N$, en nombre fini d'après la figure 7 et le fait que $\sigma(HT_{\lambda_c})$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie. Le reste de $\sigma(HT_{\lambda_c})$ est alors strictement à gauche d'une droite d'abscisse $\tilde{\xi} < 0$ et $\exists \mathcal{V}(\lambda_c)$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, la droite d'abscisse $\tilde{\xi}$ sépare en deux le spectre de HT_λ de manière à ce que (6,12) soit applicable dans $\mathcal{V}(\lambda_c)$. On notera dorénavant Λ à la place de Λ'_2 et pour le reste on emploiera les mêmes notations.

V. PROBLÈME NON-LINÉAIRE. GÉNÉRALITÉS

V.1. L'OPÉRATEUR $\mathcal{B}$

V.1.1. Généralités

Une des difficultés théoriques d'un problème non-linéaire est de trouver un espace fonctionnel simple dans lequel on puisse travailler, de manière à ce que les termes non linéaires ne perdent pas trop de leurs qualités par la formulation abstraite envisagée. C'est pourquoi nous allons voir qu'il est intéressant de se placer dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ plutôt que dans $\mathcal{W}$, par exemple, car le terme non linéaire nous enverra dans $H_1^\circ(\Omega) \cap \dot{J}(\Omega)$ qui est relativement maniable puisqu'il fait encore intervenir des fonctions qui sont, ainsi que certaines de leurs dérivées partielles, de carré sommable (ce qui est toujours plus sympathique que des fonctions de $L_{1/2}(\Omega)$ ou de $L_{4/3}(\Omega)$ pour lesquelles on ne sait pas a priori appliquer Π_0). Evidemment, le fait de raisonner sur des espaces « plus réguliers » entraîne d'autres difficultés. Ici, par exemple, nous avons dû définir le semi-groupe $\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ et, plus difficile, montrer comment il fait passer de $H_1^\circ \cap \dot{J}$ à $H_2 \cap \mathcal{W}$, c'est-à-dire chercher la nature de la singularité en $t=0$ dans ce passage. Mais, ces difficultés n'intervenant que pour des problèmes *linéaires*, l'éventail des méthodes à utiliser étant beaucoup plus riche, elles sont souvent plus aisées à traiter que si l'on s'était attaqué au problème non linéaire dans un espace moins « régulier ».

V.1.2. Définition de l'opérateur $\mathcal{B}$

Nous avons vu au § II,4.4 que le terme non linéaire du système « général » (II,4,5) est de la forme $C_0 U^{(p)} \nabla U$ où l'opérateur C_0 vérifie certaines conditions. Pour définir l'opérateur $\mathcal{B}$, nous allons procéder de manière analogue à la définition de $\mathcal{A}_\lambda$. Définissons d'abord, l'application bilinéaire

$$(1,1) \quad (U, V) \rightarrow \mathcal{M}(U, V) = C_0 U^{(p)} \nabla V,$$

et soient $U, V, W \in J(\Omega)$, en intégrant par parties on obtient :

$$(1,2) \quad (\mathcal{M}(U, V), W)_{L_2} = (C_0 U^{(p)} \nabla V, W)_{L_2} = -(U^{(p)} \nabla \bar{W}, C_0 \bar{V})_{L_2}.$$

Grâce à la constance de C_0 et à l'inégalité de Hölder, on peut écrire :

$$(1,3) \quad |(\mathcal{M}(U, V), W)_{L_2}| \leq \|C_0 V\|_{L_4} \cdot \|U^{(p)} \nabla \bar{W}\|_{L_{4/3}} \leq \gamma \|U\|_{L_4} \|V\|_{L_4} \|W\|_{\mathcal{W}}.$$

Il en résulte que pour U et V dans $J(\Omega)$, l'application $W \rightarrow (\mathcal{M}(U, V), W)_{L_2}$ est une fonctionnelle linéaire continue dans $\mathcal{W}$. On définit ainsi de manière unique un élément $\mathcal{B}(U, V)$ de $\mathcal{W}$ tel que

$$(1,4) \quad (\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}(U, V), W)_{\mathcal{W}} = -(\mathcal{M}(U, V), W)_{L_2}.$$

On remarque aussitôt que $\mathcal{B}$ est bilinéaire et que l'on a l'estimation :

$$(1,5) \quad \|\mathcal{B}(U, V)\|_{\mathcal{W}} \leq \|\mathcal{R}\| \gamma \|U\|_{L_4} \|V\|_{L_4}, \quad \forall U, V \in J(\Omega).$$

Définissons alors l'espace fonctionnel :

$\dot{L}_4(\Omega)$ = fermeture de $J(\Omega)$ dans $L_4(\Omega)$ avec la norme $U \rightarrow \|U\|_{L_4} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u^{(i)}|^4 dx \right\}^{1/4}$. Il en

résulte, par construction, que $J(\Omega)$ est dense dans $\overset{\circ}{L}_4(\Omega)$ et donc que l'on peut étendre (1,5) à U et $V \in \overset{\circ}{L}_4(\Omega)$. Remarquons alors que, d'après le théorème de Sobolev [2] p. 1691-1692, l'injection canonique de $\mathcal{W}$ dans $\overset{\circ}{L}_4(\Omega)$ est compacte puisque la dimension de l'espace est 2 ou 3. Il en résulte que l'application $(U, V) \rightarrow B(U, V)$ est bilinéaire, continue et compacte par rapport à ses deux arguments de $\mathcal{W}^2$ dans $\mathcal{W}$. Il existe une constante γ_1 telle que

$$(1,6) \quad \|B(U, V)\|_{\mathcal{W}} \leq \gamma_1 \|U\|_{\mathcal{W}} \cdot \|V\|_{\mathcal{W}}.$$

V, 1.3. Restriction de B à $\{H_2 \cap \mathcal{W}\}^2$

Supposons que U et V soient dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, on sait alors, d'après le théorème de Sobolev [1] p. 32 que U et $V \in \underline{C}^0(\bar{\Omega})$ (notation analogue à celle du § II, 1.3) et que l'on a l'estimation :

$$\|U\|_{\underline{C}^0} = \sup_{i=1, \dots, n} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u^{(i)}(x)| \leq K \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}},$$

pour une certaine constante K indépendante de U . Il en résulte que $\mathcal{M}(U, V) \in L_2(\Omega)$ puisque c'est le produit d'une fonction de $\underline{C}^0(\bar{\Omega})$ par une fonction de $H_1(\Omega)$. On remarque alors que l'on peut écrire successivement $\forall W \in \mathcal{W}$:

$$(1,7) \quad (\mathcal{R}^{-1} \mathcal{E}_j \Pi_0 \mathcal{M}(U, V), W)_{\mathcal{W}} = -(\Pi_0 \mathcal{M}(U, V), W)_j = -(\mathcal{M}(U, V), W)_{L_2},$$

d'après les propriétés de $\mathcal{E}_j$ et Π_0 . En comparant avec (1,4), on a : $\mathcal{E}_j \Pi_0 \mathcal{M}(U, V) = B(U, V)$ dans $\mathcal{W}$. Or le premier membre est dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ à cause de $\mathcal{E}_j$, d'où, l'application $(U, V) \rightarrow B(U, V)$ envoie $\{H_2 \cap \mathcal{W}\}^2$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. Montrons mieux. On a déjà $HB(U, V) = \Pi_0 \mathcal{M}(U, V)$ dans $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, mais on peut voir qu'en fait $\mathcal{M}(U, V) \in H(\Omega)$. En effet on a

$$(1,8) \quad \nabla(C_0 U^{(p)} \cdot \nabla V) = \nabla U^{(p)} \cdot \nabla(C_0 V) + U^{(p)} \cdot \nabla \nabla(C_0 V)$$

et il existe une constante γ_2 telle que

$$(1,9) \quad \|\nabla U^{(p)} \cdot \nabla \nabla(C_0 V)\|_{L_2} \leq \gamma_2 \|U\|_{\underline{C}^0} \cdot \|V\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq K \gamma_2 \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \cdot \|V\|_{H_2 \cap \mathcal{W}},$$

enfin d'après le théorème de Sobolev ([2] p. 1688) ∇U et ∇V ont leurs composantes dans $L_4(\Omega)$ et $\exists \gamma_3$, constante positive, telle que

$$\|\nabla U\|_{L_4} \leq \gamma_3 \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}$$

et une constante γ_4 telle que

$$(1,10) \quad \|\nabla U^{(p)} \cdot \nabla \nabla(C_0 V)\|_{L_2} \leq \gamma_4 \|\nabla U\|_{L_4} \cdot \|\nabla V\|_{L_4} \leq \gamma_4 \gamma_3^2 \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \cdot \|V\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}.$$

Il vient, en appliquant (1,9) et (1,10) à (1,8) que $C_0 U^{(p)} \cdot \nabla \nabla$ appartient à $H_1(\Omega)$. D'autre part, on peut définir la trace de $C_0 U^{(p)} \cdot \nabla \nabla$ sur $\partial\Omega$ ($\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ dans le cas (ii)) d'après [7] page 68 et puisque $U \in \underline{C}^0(\bar{\Omega})$, U est donc nul sur $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$), et $C_0 U^{(p)} \cdot \nabla \nabla$ aussi. Il en résulte que $\mathcal{M}(U, V) \in H(\Omega)$, d'après la deuxième définition de cet espace donnée au § II, 1.4. D'où, $\Pi_0 \mathcal{M}(U, V) \in H_1^0(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$, et l'on a $\forall (U, V) \in \{H_2 \cap \mathcal{W}\}^2$,

$$(1,11) \quad \|HB(U, V)\|_{H_1^0 \cap \overset{\circ}{J}} \leq \gamma \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \cdot \|V\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}$$

pour une certaine constante positive γ . Remarquons alors que $\mathcal{E}_j$ envoie $H_1^0 \cap \overset{\circ}{J}$ dans $H_3 \cap \mathcal{W}$ et il en résulte (grâce à la compacité de l'injection canonique de $H_3 \cap \mathcal{W}$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$) :

Lemme 6

L'application $(U, V) \rightarrow B(U, V)$, définie par (1,4), est bilinéaire continue de $\{H_2 \cap \mathcal{W}\}^2$ dans $H_3 \cap \mathcal{W}$. De plus elle est compacte par rapport à chacun de ses deux arguments dans $\mathcal{W}$ ou dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. Enfin, l'opérateur $(U, V) \rightarrow HB(U, V)$ est bilinéaire continu de $\{H_2 \cap \mathcal{W}\}^2$ dans $H_1^0 \cap \overset{\circ}{J}$.

Il en résulte alors de manière évidente :

Lemme 6'

| L'application quadratique $U \rightarrow B(U, U)$ est complètement continue dans $\mathcal{W}$ et dans $H_2 \cap \mathcal{W}$.

En effet la continuité est évidente, quant à la compacité, elle se déduit immédiatement de la compacité relativement à chaque argument de $B(U, V)$.

V.2. PREMIÈRE FORMULATION ABSTRAITE DU PROBLÈME

V.2.1. Solution généralisée

Nous appelons « solution généralisée » sur $[0, T]$ du système (II,4,5), tout U tel que :

$$(2,1) \quad \begin{aligned} U &\in C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W}), \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= H[T_\lambda U - B(U, U)]. \end{aligned}$$

Il en résulte que $U \in C^1([0, T]; \dot{J}(\Omega))$ puisque $HT_\lambda U \in C^0([0, T]; \dot{J}(\Omega))$ et $HB(U, U) \in C^0([0, T]; H_1 \cap \dot{J})$. Notons que nous employons la même définition pour la solution généralisée sur $[0, \infty[$. Remarquons que l'équation (2,1) s'obtient en appliquant Π_0 à (II,4,5) puisque pour $U \in H_2 \cap \mathcal{W}$, $HU = \Pi_0 \Delta \mathcal{R}^{-1}U$, $H\alpha_\lambda U = \Pi_0(V_0 \cdot \nabla U + B_0 U)$, $HB(U, U) = \Pi_0 \mathcal{M}(U, U) = \Pi_0 C_0 U^{(P)} \cdot \nabla U$ et qu'enfin $\Pi_0 \nabla p = 0$ si $\nabla p \in G_0(\Omega)$. Réciproquement, si U est solution généralisée alors $\exists \nabla p \in C^0([0, T]; G_0(\Omega))$ tel que la première équation de (II,4,5) soit vérifiée dans $C^0([0, T]; L_2(\Omega))$, la deuxième étant vérifiée dans $C^0([0, T]; H_1(\Omega))$.

Notons enfin que pour notre problème, il faut adjoindre à (2,1) la condition initiale $U(0) = U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}$.

V.2.2. Intérêt de cette première formulation

Pourquoi avons-nous transformé le système classique (II,4,5) pour le mettre sous la forme (2,1) ? La réponse à cette question est que (2,1) permet de formuler le problème stationnaire sous la forme

$$(2,2) \quad T_\lambda U - B(U, U) = 0.$$

Nous entendons par « problème stationnaire », la recherche de solutions dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$, non identiquement nulles de (2,2) (la recherche dans $\mathcal{W}$ est identique). C'est donc essentiellement un problème de non-unicité de la solution de (2,2), puisque dans tous les cas $U=0$ est solution. Nous étudierons ce phénomène au chapitre VI et nous verrons l'influence de λ sur cette non unicité. Le genre de problème auquel nous sommes ramené est appelé, d'une manière générale, problème de « bifurcation ». En outre, nous remarquons que (2,2) s'écrit sous la forme :

$$(2,3) \quad U = \lambda (1 - A_0)^{-1} A_1 U + (1 - A_0)^{-1} B(U, U).$$

L'intérêt de (2,3) est que l'opérateur non linéaire $U \rightarrow (1 - A_0)^{-1} B(U, U)$ est complètement continu, tandis que la dérivée au sens de Fréchet du second membre en $U=0$ n'est autre que l'opérateur linéaire $\lambda (1 - A_0)^{-1} A_1$ qui est lui aussi compact grâce à A_1 . Cette formulation est classique (voir Commentaires et Remarques) et c'est pourquoi nous nous y sommes ramené. Un autre intérêt, non négligeable de (2,1) est que nous pourrions relier simplement l'étude du problème stationnaire (Chap. VI) et l'étude du problème instationnaire, cette incidence étant poussée extrêmement loin notamment au chapitre VII.

V,3. DEUXIÈME FORMULATION ABSTRAITE - EXISTENCE

V,3.1. Nouvelle formulation du problème

La formulation (2,1) n'est pas idéale pour traiter le problème non-linéaire instationnaire, c'est pourquoi nous sommes amené à la transformer. Pour cela considérons dans (2,1) que le terme non linéaire joue le rôle de $\Pi_0 f$ dans (IV,6,25), nous pouvons alors écrire (2,1) sous la forme équivalente :

$$(3,1) \quad U(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0 - \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) HB[U(\tau), U(\tau)] d\tau,$$

qui englobe la condition initiale. L'intérêt de cette équation est que l'on ne manie plus que des opérateurs continus dans $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$ et qu'en conséquence on est ramené à un « problème de point fixe » dans cet espace. Pour le montrer, simplifions d'abord l'écriture en définissant :

$$(3,2) \quad \mathcal{B}(U, V; \lambda) = - \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) HB[U(\tau), V(\tau)] d\tau,$$

puis remarquons que d'après (1,11) et (IV,6,20) il existe une constante positive γ telle que :

$$(3,3) \quad \|\mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) HB[U(\tau), V(\tau)]\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma \|U\| \|V\| [1 + (t-\tau)^{-3/4}] e^{\xi_1(t-\tau)},$$

où l'on note $\|U\| = \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}$ comme défini au § III,4.3. Or la fonction $\tau \rightarrow \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) HB(U(\tau), V(\tau))$ est continue sur $[0, t]$ à valeurs dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. L'intégrale sera donc fonction continue de t si elle est uniformément convergente sur $[0, T]$ et c'est bien le cas grâce à (3,3). Plus précisément, on a

$$(3,4) \quad \|\mathcal{B}(U, V; \lambda)\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma \|U\| \|V\| \dot{I}(t, \xi_1),$$

avec

$$\dot{I}(t, \xi_1) = \int_0^t (1 + \tau^{-3/4}) e^{\xi_1 \tau} d\tau,$$

$$\dot{I}(t, \xi_1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \text{ et si } \xi_1 < 0, \dot{I}(t, \xi_1) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{ limite finie.}$$

Après avoir remarqué que pour que l'on puisse choisir $\xi_1 < 0$, il faut et il suffit que $\xi_0(\lambda)$ soit négatif, nous pouvons énoncer :

Lemme 7

L'application bilinéaire $(U, V) \rightarrow \mathcal{B}(U, V; \lambda)$ est continue de $\{C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})\}^2$ dans $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$. D'autre part, si $\xi_0(\lambda) < 0$, alors on peut remplacer $[0, T]$ par $[0, \infty[$ dans la phrase précédente.

V,3.2. Dépendance par rapport à λ de $\mathcal{B}(U, V; \lambda)$

Définissons la fonction

$$t \rightarrow \dot{J}(t, \xi_1) = \int_0^t (1 + \tau^{-1/2}) e^{\xi_1 \tau} d\tau,$$

alors $\dot{J}(t, \xi_1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et si $\xi_1 < 0$, $\dot{J}(t, \xi_1) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{ limite finie}$. Si maintenant, dans (3,2), on remplace

$\mathcal{I}(t; HT_\lambda)$ par son développement (IV,7,2) par rapport à λ au voisinage de $\lambda_0 \in I$, alors d'après (IV,7,10) on peut écrire :

$$(3,5) \quad \mathcal{B}(U, V; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{B}_n(U, V)$$

pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, avec $(U, V) \rightarrow \mathcal{B}_n(U, V)$ bilinéaire continue de $\{C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})\}^2$ dans

$C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$, la série (3,5) convergeant absolument dans $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$. De plus on a les estimations :

$$(3,5)' \quad \|\mathcal{B}_n(U, V)\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma \delta^{-n} J(t, \xi_1) \|U\| \cdot \|V\| ,$$

pour $n \geq 1$, et $\mathcal{B}_0(U, V) \equiv \mathcal{B}(U, V; \lambda_0)$ pour $n=0$, où γ est une constante positive. Notons ici encore que l'on peut remplacer $[0, T]$ par $[0, \infty[$ si $\xi_1 < 0$.

V,3.3. Existence et unicité d'une solution généralisée sur $[0, T]$

Le problème s'écrit donc dans $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$, sous la forme

$$(3,6) \quad U = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0 + \mathcal{B}(U, U; \lambda) ,$$

et il s'agit de trouver U dans cet espace en s'aidant des estimations (IV,6,18) et (3,4). Nous allons supposer $\|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}$ arbitraire et montrer qu'il existe T tel que l'on ait une solution généralisée sur $[0, T]$.

Plaçons nous dans la boule de $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$ de centre 0 , de rayon $M = (1 - k/2)^{-1} \gamma \|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \sup(1, e^{\xi_1 T})$, ($k < 1$) alors, d'après (3,4) et la bilinéarité,

$$(3,7) \quad \|\mathcal{B}(U_2, U_2; \lambda) - \mathcal{B}(U_1, U_1; \lambda)\| \leq 2 \gamma M \dot{I}(T, \xi_1) \|U_2 - U_1\| .$$

Choisissons alors T de manière à ce que l'on ait :

$$2 \gamma^2 \dot{I}(T, \xi_1) \|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \sup(1, e^{\xi_1 T}) \leq k (1 - k/2) \quad (0 < k < 1)$$

ce qui est toujours possible puisque si $T \rightarrow 0$, le premier membre tend vers 0 ; il vient alors $2 M \gamma \times \dot{I}(T, \xi_1) \leq k < 1$ et le second membre de (3,6) est contractant. D'autre part on peut borner ce second membre par

$$\gamma \|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \sup(1, e^{\xi_1 T}) + \gamma M^2 \dot{I}(T, \xi_1) \leq M .$$

Il en résulte que l'on peut appliquer la méthode des approximations successives pour résoudre (3,6) dans la boule $\|U\| \leq M$; et l'on a

Lemme 8

$\forall U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}$ et $\forall \lambda_0 \in I$, $\exists T > 0$ tel qu'il existe une solution généralisée unique sur $[0, T]$ pour les équations (3,6) et (2,1); nous la notons $\mathcal{U}(\lambda_0; U_0)$.

Etudions maintenant la dépendance de la solution de (3,6) par rapport à λ et U_0 . Pour cela notons :

$$(3,8) \quad \mathfrak{F}(U, U_0; \lambda) = U - \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0 - \mathcal{B}(U, U; \lambda) ,$$

et nous savons alors que $\mathfrak{F}(\mathcal{U}(\lambda_0; U_0), U_0; \lambda_0) = 0$. D'autre part, d'après (3,5) et (IV,7,11), la fonction $(U, U_0', \lambda) \rightarrow \mathfrak{F}(U, U_0', \lambda)$ est développable en série de Taylor au voisinage de $(\mathcal{U}(\lambda_0; U_0), U_0, \lambda_0)$ convergente dans $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$, l'espace « objet » étant muni de la topologie du produit cartésien $\{C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})\} \times \{H_2 \cap \mathcal{W}\} \times \mathbb{C}$.

Il est à noter que la seule restriction sur le voisinage en question porte sur λ qui doit être tel que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Enfin la dérivée au sens de Fréchet $\mathfrak{F}'_0(\mathcal{U}(\lambda_0; U_0), U_0, \lambda_0)$ admet un inverse borné dans $\mathcal{L}\{C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})\}$: en effet

$$\mathfrak{F}'_0(\mathcal{U}, U_0; \lambda_0) V = V - [\mathcal{B}(V, \mathcal{U}; \lambda_0) + \mathcal{B}(\mathcal{U}, V; \lambda_0)]$$

$$\text{et} \quad \|\mathcal{B}(V, \mathcal{U}; \lambda_0) + \mathcal{B}(\mathcal{U}, V; \lambda_0)\| \leq 2 \gamma M \dot{I}(T, \xi_1) \|V\| \leq k \|V\| ,$$

d'après le choix de M et de T . Comme $k < 1$, il vient que dans $\mathcal{L}\{C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})\}$ on a $\|[\mathfrak{F}'_0(\mathcal{U}, U_0; \lambda_0)]^{-1}\| \leq (1 - k)^{-1}$. Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème, que l'on trouve dans [49]

page 33, sur les fonctions implicites. Il en résulte :

Théorème 3 - Existence dans le cas général

$\forall U_0 \in H_2 \cap W$ et $\forall \lambda_0 \in I, \exists T, \delta, \varepsilon > 0$ tels que pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta, \|U'_0 - U_0\|_{H_2 \cap W} < \varepsilon$, il existe une solution généralisée unique $\mathcal{U}$ sur $[0, T]$, développable en série de Taylor de $(U'_0 - U_0, \lambda - \lambda_0)$ dans le voisinage considéré. Elle vérifie donc

$$(3,9) \quad \mathcal{U} = \mathcal{I}(t, HT_\lambda) U'_0 + \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{U}; \lambda)$$

et la fonction $(U'_0, \lambda) \rightarrow \mathcal{U}(\lambda; U'_0)$ vérifie

$$(3,10) \quad \mathcal{U}(\lambda; U'_0) = \sum_{n,p=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{U}_n^{(p)}(U'_0 - U_0, \dots, U'_0 - U_0),$$

où $\mathcal{U}_n^{(p)}$ est une application p -linéaire continue de $\{H_2 \cap W\}^p$ dans $C^0([0, T]; H_2 \cap W)$, et où l'on note que $\mathcal{U}_n^{(0)}$ correspond au coefficient de $(\lambda - \lambda_0)^n$ dans le développement de $\mathcal{U}(\lambda; U_0)$, la série (3,10) étant absolument convergente, pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ et $\|U'_0 - U_0\|_{H_2 \cap W} < \varepsilon$, dans $C^0([0, T]; H_2 \cap W)$.

V.4. STABILITÉ NON-LINÉAIRE DANS LE CAS SOUS-CRITIQUE

V.4.1. Existence d'une solution généralisée sur $[0, \infty[$

Nous avons défini au § IV.7.3 un λ critique λ_c et nous avons vu qu'avec nos hypothèses, si $0 \leq \lambda < \lambda_c$ alors $\xi_0(\lambda) < 0$. Alors si nous choisissons $\lambda_0 \in [0, \lambda_c[$ nous disons que nous sommes dans le cas sous-critique, et nous savons d'après ce qui précède que nous pouvons trouver $\xi_1 < 0$ et $\mathcal{V}(\lambda_0)$ tels que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$ on ait (IV.7.11), (3,5) et (3,5)' à notre disposition. Le Lemme 8 peut être alors notablement amélioré si l'on a $4\gamma^2 \|U_0\|_{H_2 \cap W} \bar{I}(\infty, \xi_1) < 1$, ce qui est le cas si $\|U_0\|_{H_2 \cap W}$ est pris suffisamment petit. En effet, dans ce cas on peut choisir T infini, c'est-à-dire que l'on a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution généralisée sur $[0, \infty[$. On peut alors remplacer le Théorème 3 par :

Corollaire du Théorème 3 -

$\forall \lambda_0 \in [0, \lambda_c[, \exists \varepsilon_0, \delta, \varepsilon_1 > 0$ tels que pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta, U_0$ et U'_0 tels que $\|U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_0, \|U'_0 - U_0\|_{H_2 \cap W} < \varepsilon_1, \exists \mathcal{U}$ solution de (3,9), vérifiant (3,10), dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$.

V.4.2. Comportement asymptotique de la solution quand $t \rightarrow \infty$

Le corollaire précédent n'entraîne pas pour autant la stabilité de la solution $U=0$ de l'équation (2,1). En effet, pour qu'il y ait stabilité, il faut montrer que l'on peut rendre $\|U(t)\|_{H_2 \cap W}$ aussi petit que l'on veut pour $t > T$ suffisamment grand, pourvu que l'on choisisse adéquatement $\|U_0\|_{H_2 \cap W}$. Or, dans notre cas pour $\|U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_0$ on sait d'après la démonstration du Lemme 8 que la solution $\mathcal{U}(t)$ reste bornée dans $H_2 \cap W$ par $M = (1 - k/2)^{-1} \gamma \|U_0\|_{H_2 \cap W}$ (k est déterminé par ε_0). Il en résulte que la solution $U=0$ de (2,1) est stable au sens de Liapounov, c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ tel que $\|U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \eta$ entraîne $\|\mathcal{U}(t)\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon$.

Nous allons montrer mieux, c'est-à-dire la stabilité asymptotique exponentielle au sens de Liapounov de la solution stationnaire $U=0$ de (2,1). Pour cela nous allons montrer que $U_1(t) = \exp(-1/3 \xi_1 t) \mathcal{U}(t)$ est dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$. En effet on a :

$$(4,1) \quad \exp(-1/3 \xi_1 t) \mathcal{B}(U, V; \lambda) = - \int_0^t e^{-1/3 \xi_1 (t-\tau)} \mathcal{I}(t-\tau, HT_\lambda) \mathbf{HB}(U_1(\tau), V_1(\tau)) d\tau,$$

en posant $U_1(t) = e^{-1/3 \xi_4 t} U(t)$ et $V_1(t) = e^{-1/3 \xi_4 t} V(t)$. Puis en posant encore

$$(4,2) \quad \mathcal{B}_1(U_1, V_1; \lambda) = \exp(-1/3 \xi_4 t) \mathcal{B}(U, V; \lambda)$$

on obtient, de la même manière que pour (3,4) :

$$(4,3) \quad \|\mathcal{B}_1(U_1, V_1; \lambda)\|_{H_2 \cap W} \leq \gamma e^{1/3 \xi_4 t} \mathcal{I}(t, \xi_4/3) \|U_1\| \|V_1\|.$$

D'autre part, on a à partir de (IV,6,18) :

$$(4,4) \quad \|\exp(-1/3 \xi_4 t) \mathcal{I}(t; HT_\lambda)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap W)} \leq \gamma e^{2/3 \xi_4 t},$$

il en résulte que si l'on met (3,6) sous la forme

$$(4,5) \quad U_1 = \exp(-1/3 \xi_4 t) \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_0 + \mathcal{B}_1(U_1, U_1; \lambda)$$

obtenue par une multiplication des deux membres par $\exp(-1/3 \xi_4 t)$, on peut alors résoudre par rapport à U_1 . Il suffit de faire le même raisonnement que pour la démonstration du Lemme 8 avec T infini et $\xi_4/3$ à la place de ξ_4 , après avoir choisi $\|U_0\|_{H_2 \cap W}$ suffisamment petit. On arrive alors aisément au résultat que la solution unique $U_1(t) = \exp(-1/3 \xi_4 t) \mathcal{U}(t)$ de (4,5) reste bornée quand t croît puisqu'elle est dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$. Il en résulte immédiatement que $\|\mathcal{U}(t)\|_{H_2 \cap W} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ exponentiellement. De plus, procédant de la même manière que pour la démonstration du Théorème 3, on montre :

Théorème 4 - Cas sous-critique.

$\forall \lambda_0 \in [0, \lambda_c[$, $\exists \varepsilon_0, \delta, \varepsilon_1 > 0$ tels que pour $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, U_0 et U'_0 tels que $\|U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_0$, $\|U'_0 - U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_1$, il existe une solution généralisée unique sur $[0, \infty[$, $\mathcal{U}$, qui vérifie dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$:

$$\mathcal{U} = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U'_0 + \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{U}; \lambda);$$

la fonction $(U'_0, \lambda) \rightarrow \mathcal{U}(\lambda; U'_0)$ est développable en série de Taylor sous la forme (3,10), convergente dans les mêmes conditions qu'au théorème 3. De plus les applications $\mathcal{U}_n^{(p)}$ admettent des majorations de la forme :

$$\|\mathcal{U}_n^{(p)}(U, \dots, U)\|_{H_2 \cap W} \leq \delta_{np} e^{-k t} \|U\|_{H_2 \cap W}^p, \quad n, p = 0, 1, \dots$$

où $\sum_{n,p=0}^{\infty} \delta_{np} \tau^n \delta^p$ est une série convergente pour $|\tau| < \delta$, $|\delta| < \varepsilon_1$ et k est un nombre positif indépendant de λ dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$.

Notons enfin, qu'il serait intéressant de pouvoir estimer ε_0 (défini par le théorème précédent) quand $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$. En fait, comme nous l'avons vu pour la démonstration du Lemme 8, il s'agirait de donner une « bonne majoration » de $\gamma^2 \mathcal{I}(\infty, \xi_4)$ où γ^2 représente le produit de la constante intervenant dans (IV,6,18) et de celle qui intervient dans (IV,6,20). C'est sans doute l'estimation de ces constantes quand λ est voisin de λ_c qui est la plus délicate, car on peut évaluer $\mathcal{I}(\infty, \xi_4)$ en considérant que ξ_4 peut être choisi de l'ordre de $\xi_0(\lambda)$, lequel ordre peut être précisé grâce à notre discussion du § IV,3.3 (ordre de $\sigma_{\alpha} \tau_{\alpha i}$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_c$, $i = 1, \dots, k_n$, $n = 1, \dots, N$). En ce qui concerne l'évaluation des constantes γ , on ne peut raisonnablement pas utiliser (IV,6,12) puisque le développement en série de Laurent des $E_{(n)}(\tau_{ni})$ n'est pas connu. Il faudrait donc évaluer $R(\tau; HT_\lambda)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{J})$ pour $\tau \in \Lambda_2 \cap E$, où $\Lambda_2 \cap E$ n'est autre qu'un segment d'abscisse ξ_4 tel que $\xi_0(\lambda) < \xi_4 < 0$, et utiliser cette estimation dans (IV,6,11); mais nous ne le ferons pas ici, car il semble qu'il nous manque quelques renseignements complémentaires. Notons simplement que cette estimation est aisée à trouver dans le cas où la meilleure constante γ_λ pour (IV,1,11) est identique à $\xi_0(\lambda)$ (ce serait le cas si l'on pouvait trouver un produit scalaire dans $\mathcal{J}(\Omega)$ tel que HT_λ y soit autoadjoint) puisqu'alors ce n'est autre que (IV,6,8).

V.4.3. Cas du problème traité par O.A. Ladyzhenskaya

Comme dans ([6] p. 121 et suivantes), il s'agit d'appliquer notre méthode (afin d'en tester l'efficacité, au système (à 2 ou 3 dimensions)

$$(4,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \nu \Delta U - U \cdot \nabla U - \nabla p + f, \\ \nabla \cdot U = 0, \\ U|_{\partial \Omega} = 0, \quad U(0) = U_0. \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega \text{ borné}$$

Nous supposons $U_0 \in H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ et f tel que $\Pi_0 f \in C^0([0, \infty[; H_1^0 \cap \mathcal{J})$, c'est-à-dire que f ne dérive pas obligatoirement d'un potentiel. Cherchons une solution U de (4,6) dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$.

Reformulons (4,6) sous la forme suivante :

$$(4,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = H U - \Pi_0 U \cdot \nabla U + \Pi_0 f, \\ U(0) = U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}, \end{array} \right.$$

où ∇p a disparu grâce à Π_0 . Alors, si l'on considère $\Pi_0 f - \Pi_0 U \cdot \nabla U$ comme un second membre, on peut appliquer la même méthode qu'au § III,4.3 et écrire (4,7) sous la forme :

$$(4,8) \quad U = \mathcal{I}(t; H) U_0 + \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 f(\tau) d\tau - \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 U(\tau) \cdot \nabla U(\tau) d\tau.$$

Le lemme 3 nous permet de majorer les intégrales de (4,8), de la même manière que pour l'obtention de (3,4) :

$$(4,9) \quad \left\| \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma_2 I(t, -k) \|\Pi_0 f\|_{H_1^0 \cap \mathcal{J}},$$

$$(4,10) \quad \left\| \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 U(\tau) \cdot \nabla U(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \gamma_2 I(t, -k) \|U\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}^2.$$

Procédant alors strictement de la même manière que pour montrer le Lemme 8 on obtient :

Théorème 5 -

$\forall U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}$ et $\forall f$ tel que $\Pi_0 f \in C^0([0, \infty[; H_1^0 \cap \mathcal{J})$, $\exists T > 0$ tel qu'il existe une solution généralisée unique U sur $[0, T]$ pour le système (4,6). ∇p est obtenu en écrivant $(1 - \Pi_0) [f + \nu \Delta U - U \cdot \nabla U]$, f devant vérifier au moins $(1 - \Pi_0) f(t) \in G_0(\Omega)$, $\forall t \in [0, \infty[$.

Maintenant, de la même manière que pour l'obtention du corollaire du théorème 3, nous obtenons :

Théorème 5' -

Soient $U_0 \in H_2 \cap \mathcal{W}$ et $\Pi_0 f \in C^0([0, \infty[; H_1^0 \cap \mathcal{J})$, alors, si l'on a

$$(4,11) \quad \left[\|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} + \gamma_1 I(\infty, -k) \|\Pi_0 f\| \right] < \left[4 \gamma_2 I(\infty, -k) \right]^{-1},$$

il existe une solution généralisée U , unique sur $[0, \infty[$, pour le système (4,6). Les constantes γ_1, γ_2 et k intervenant dans (4,11) sont celles qui interviennent dans (4,9) et (4,10) et sont déterminées grâce au Lemme 3 et à

$$I(\infty, -k) = \int_0^\infty (1+t^{-3/4}) e^{-kt} dt = k^{-1} + k^{-1/4} \Gamma(1/4).$$

Notons que notre solution est donc dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$, et que si nous comparons les résultats des deux théorèmes précédents avec ceux de ([6] page 142, nous remarquons dans le cas tridimensionnel qu'avec des hypothèses légèrement différentes sur f , nous obtenons une solution sur $[0, \infty[$ au lieu de $[0, T]$, et il est facile de montrer qu'une solution généralisée à notre sens est encore une solution généralisée au sens de

[6] page 123. L'efficacité de notre méthode est donc démontrée*.

Montrons enfin que si $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap J} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ alors $\|U(t)\|_{H_2 \cap W} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. En fait, on a déjà pour $t \geq T$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap W} &\leq \left\| \int_T^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap W} + \\ &+ \left\| \mathcal{I}(t-T; H) \int_0^T \mathcal{I}(T-\tau; H) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap W}, \end{aligned}$$

d'où

$$(4,12) \quad \left\| \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; H) \Pi_0 f(\tau) d\tau \right\|_{H_2 \cap W} \leq \gamma_1 I(\infty, -k) \left[\sup_{t \geq T} \|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap J} + e^{-k(t-T)} \|\Pi_0 f\|_{H_1^0 \cap J} \right],$$

et, dans (4,8) le terme en U_0 et l'intégrale portant sur $\Pi_0 f$, tendent vers 0 dans $H_2 \cap W$ quand $t \rightarrow \infty$.

Notons, comme au § V,3.3, M le rayon de la boule dans laquelle nous nous sommes placé pour montrer le Théorème 5'. Nous savons que M vérifie l'inégalité : $2M\gamma_2 I(\infty, -k) < 1$, pour rendre le second membre de (4,8) contractant. Il en résulte que l'on a $\forall t \geq 0$

$$(4,13) \quad \|U(t)\|_{H_2 \cap W} < [2\gamma_2 I(\infty, -k)]^{-1}.$$

Or, pour $t \geq T$ on a, d'après (4,8) et (4,12) :

$$(4,14) \quad \|U(t)\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon(t) + \gamma_2 I(\infty, -k) \left\{ \sup_{t \geq T} \|U(t)\|_{H_2 \cap W}^2 + e^{-k(t-T)} \|U\|^2 \right\},$$

où $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. Notons $\varepsilon_1(t) = \varepsilon(t) + \gamma_2 I(\infty, -k) e^{-k(t-T)} \|U\|^2$, alors $\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ et (4,13),

(4,14) entraînent que pour $t \geq T$: $\sup_{t \geq T} \|U(t)\|_{H_2 \cap W} \leq 2 \sup_{t \geq T} \{\varepsilon_1(t)\}$. D'où $\|U(t)\|_{H_2 \cap W} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

On montrerait encore facilement que si $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap J} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ exponentiellement, alors la solution $U(t)$

de (4,8) tend elle aussi vers 0, exponentiellement (notons que ceci peut être montré à la manière du Théorème 4). En résumé, nous obtenons :

Corollaire du Théorème 5'

L'inégalité stricte (4,11) étant réalisée, si on a de plus $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap J} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ (resp. $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^0 \cap J} \leq \gamma e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$), alors la solution généralisée $U(t)$ tend vers 0 dans $H_2 \cap W$ quand $t \rightarrow \infty$ (resp. $\|U(t)\| \leq \gamma e^{-\inf(\alpha, k)t}$). On dit qu'il y a stabilité asymptotique (resp. stabilité asymptotique exponentielle) de la solution stationnaire $U=0$ de (4,6).

V.5. CAS SUR-CRITIQUE, AVEC PERTURBATION INITIALE PARTICULIÈRE

Supposons que l'on ait λ fixé dans I , et $\xi_0(\lambda) \geq 0$. Nous allons voir dans quelles conditions la solution $\mathcal{U}(t)$ de (3,6) peut encore tendre vers 0 dans $H_2 \cap W$, quand $t \rightarrow \infty$.

Définissons comme précédemment $\tilde{\xi} < 0$ tel que

$$\sigma(H\Gamma_\lambda) \cap \{\zeta, \zeta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \zeta \geq \tilde{\xi}\} = \{\zeta_i; i=1, \dots, N, \operatorname{Re} \zeta_i \geq 0\}.$$

Nous avons ainsi défini la projection $P_\lambda = 1 - \sum_{\lambda=1}^N E_{(H\Gamma_\lambda)}(\zeta_i)$ et nous avons l'identité (IV,6,14) à notre disposition. Supposons alors que U_0 soit tel que $P_\lambda U_0 = U_0$, c'est-à-dire que $\sum_{(H\Gamma_\lambda)} (\zeta_i) U_0 = 0$, $i=1, \dots, N$, alors $\mathcal{I}(t; H\Gamma_\lambda) U_0 = P_\lambda \mathcal{I}(t; H\Gamma_\lambda) U_0$, et le terme en U_0 de (3,6) tend exponentiellement vers 0 dans $H_2 \cap W$ quand $t \rightarrow \infty$. Pour étudier l'évolution de la solution $\mathcal{U}(t)$ quand $t \rightarrow \infty$, nous sommes

*L'auteur a eu connaissance très récemment d'une démonstration de TARTAR (Cf. Commentaires et Remarques) sur l'existence et l'unicité d'une solution de (4,6) dans un espace plus général.

alors amené à formuler une nouvelle hypothèse afin d'exploiter la décroissance du terme en U_0 . Nous remarquons en effet, que si l'on a $\forall U, V \in \{U; U \in C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W}), (1-P_\lambda)U=0\}$:

$$(5,1) \quad \mathfrak{B}(U, V; \lambda) = P_\lambda \mathfrak{B}(U, V; \lambda) = \tilde{\mathfrak{B}}(U, V; \lambda),$$

alors l'équation (3,6) peut être considérée comme la même que dans le cas sous-critique et l'on peut faire une démonstration du type de celle du théorème 4 dans le sous-espace $\{U; U \in C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W}), (1-P_\lambda)U=0\}$. Il reste donc à donner une condition suffisante pour que (5,1) soit vérifié.

Remarquons d'abord que si $U \in H_1^0 \cap \mathcal{J}$, alors $P_\lambda U \in H_1^0 \cap \mathcal{J}$. En effet $\forall U \in \mathcal{J}$, $E(\zeta_i)U \in H_2 \cap \mathcal{W}$ puisque les vecteurs propres de HT_λ sont dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ et que les dimensions des sous-espaces invariants sont finies. Or $P_\lambda U = U - \sum_{i=1}^N E(\zeta_i)U$, et comme la différence d'un élément de $H_1^0 \cap \mathcal{J}$ et d'un élément de $H_2 \cap \mathcal{W}$ est dans $H_1^0 \cap \mathcal{J}$, il en résulte que $P_\lambda \in \mathcal{L}(H_1^0 \cap \mathcal{J})$. Faisons alors, l'hypothèse suivante :

$$(5,2) \quad \forall U, V \in H_2 \cap \mathcal{W}, \quad E(\zeta_i)HB(P_\lambda U, P_\lambda V) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Cela revient à dire que l'espace $\{P_\lambda(H_2 \cap \mathcal{W})\}^2$ est envoyé par l'opérateur $HB(.,.)$ dans $P_\lambda\{H_1^0 \cap \mathcal{J}\}$ (sorte d'invariance relative à P_λ). Il en résulte immédiatement, d'après (IV,6,12) que (5,1) est réalisé. On peut donc énoncer :

Théorème 6 -

Si, pour un certain $\lambda \in I$, tel que $\xi_0(\lambda) \geq 0$, l'hypothèse (5,2) est vérifiée, et si U_0 vérifie

$$E(\zeta_i)U_0 = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{les } \zeta_i \text{ étant les valeurs propres de } HT_\lambda \text{ telles}$$

que $\Re \zeta_i \geq 0$, alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq \varepsilon_0 (P_\lambda U_0 = U_0)$, entraîne l'existence

d'une solution généralisée unique sur $[0, \infty[$ de (3,6), $\mathfrak{X}(t)$, qui tend exponentiellement vers 0 dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, quand $t \rightarrow \infty$.

V.6. AUTRE FORMULATION POSSIBLE

V.6.1. Généralités

Nous donnons dans ce paragraphe une formulation très pratique dans le cadre d'un traitement asymptotique. En fait, elle n'est véritablement utile que dans le cas où tous les indices des valeurs propres ζ_i valent 1 pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$. En particulier, c'est cette hypothèse qui a été formulée implicitement par W. Eckhaus [11] et qui lui a permis d'arriver à ses fins. Pour notre part, nous allons établir le système infini d'équations d'amplitudes, laissant le soin, au lecteur intéressé, de se reporter à l'ouvrage en question pour l'étude asymptotique de ce système.

V.6.2. Cas général

L'idée est de développer l'équation (2,1) dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ suivant les espaces invariants associés à l'opérateur linéaire HT_λ . En fait, il est plus pratique d'utiliser (3,6), quitte à revenir plus tard à la formulation différentielle.

Utilisons le théorème 1 et les résultats du § IV,5.2, on a

$$\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}, \quad U = \sum_{i=1}^{\infty} E(\zeta_i)U \quad (\text{on note } E(\zeta_i) \equiv E(\zeta_i)_{(HT_\lambda)}),$$

$$E(\zeta_i) \mathfrak{X}(t; HT_\lambda)U = \mathfrak{X}(t; HT_\lambda) E(\zeta_i)U = e^{\zeta_i t} \mathfrak{G}(\zeta_i; t)U.$$

D'où, $\forall t \geq 0$

$$(6,1) \quad \mathcal{L}(t, HT_\lambda)U = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\tau_i t} \mathcal{G}(\tau_i; t) U,$$

où $\mathcal{G}(\tau_i; 0) \equiv E(\tau_i)$ et où la série (6,1) converge dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. Notons que (6,1) converge dans $\mathring{J}(\Omega)$ ou dans $\mathcal{W}$ si U est respectivement dans $\mathring{J}$ ou $\mathcal{W}$ d'après le Théorème 2. Notons encore, d'après leur forme (IV,6,12), que les opérateurs $\mathcal{G}(\tau_i; t)$ sont dans $\mathcal{L}(\mathring{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$, puisque $(HT_\lambda - \tau_i 1)^p E(\tau_i) \in \mathcal{L}(\mathring{J}, H_2 \cap \mathcal{W})$ grâce à la régularité des $U_{i,j}$, vecteurs propres généralisés de HT_λ . On peut alors écrire

$$\mathcal{B}(U, U; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} E(\tau_i) \mathcal{B}(U, U; \lambda) = - \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e^{\tau_i(t-\tau)} \mathcal{G}(\tau_i; t-\tau) HB(U(\tau), U(\tau)) d\tau,$$

et l'équation (3,6) se décompose sous la forme :

$$(6,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\tau_i)U = e^{\tau_i t} \mathcal{G}(\tau_i; t) U_0 - \int_0^t e^{\tau_i(t-\tau)} \mathcal{G}(\tau_i; t-\tau) HB[U(\tau), U(\tau)] d\tau, \\ i = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Notons maintenant comme au § IV,5.2, $E(\tau_i)U = \sum_{j=1}^{m_i} A_{i,j} U_{i,j}$, il vient alors :

$$(6,3) \quad (\mathcal{G}(\tau_i; t) U_0, U_{i,j}^*)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = \sum_{p=0}^{v_i-1} \frac{t^p}{p!} (U_0, [(HT_\lambda)^* - \tau_i 1]^p U_{i,j}^*)_{H_2 \cap \mathcal{W}},$$

où $\{U_{i,j}^*\}$ est le système de vecteurs propres généralisés de $(HT_\lambda)^*$, biorthogonal au système $\{U_{i,j}\}$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. Notons $\{U_{i,j}^{*(1)}\}$ le système analogue biorthogonal à $\{U_{i,j}\}$ dans $\mathring{J}(\Omega)$, il vient alors :

$$(6,4) \quad E(\tau_i) HB(U, U) = \sum_{k=1}^{m_i} (HB(U, U), U_{i,k}^{*(1)})_{\mathring{J}} U_{i,k},$$

et (6,2) se décompose sous la forme :

$$(6,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{i,j}(t) = \sum_{p=0}^{v_i-1} \sum_{k=1}^{m_i} (U_{i,k}, [(HT_\lambda)^* - \tau_i 1]^p U_{i,j}^*)_{H_2 \cap \mathcal{W}} \left\{ e^{\tau_i t} \frac{t^p}{p!} A_{i,k}^{(0)} - \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{p!} e^{\tau_i(t-\tau)} (HB[U(\tau), U(\tau)], U_{i,k}^{*(1)})_{\mathring{J}} d\tau \right\}, \\ j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

$$\text{où } U_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} A_{i,k}^{(0)} U_{i,k}.$$

Si l'on veut ramener (6,5) à un système différentiel, on remarque que les $A_{i,j}$, $j=1, \dots, m_i$, satisfont un système d'ordre v_i , de m_i équations commençant par $(\frac{d}{dt} - \tau_i)^{v_i} A_{i,j}$. Mais, dans le cas où $v_i > 1$, ce système compliqué ne présente pas d'intérêt pour nous et nous n'entreprendrons pas de l'écrire.

V,6.3. Cas où tous les indices valent 1

Dans le cas où $\forall \tau_i \in \sigma(HT_\lambda)$, on a $v_i = 1$, alors (6,5) devient plus simple :

$$(6,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{i,j}(t) = e^{\tau_i t} A_{i,j}^{(0)} - \int_0^t e^{\tau_i(t-\tau)} (HB[U(\tau), U(\tau)], U_{i,j}^{*(1)})_{\mathring{J}} d\tau, \\ j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{array} \right.$$

et l'on peut écrire simplement le système différentiel associé :

$$(6,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_{i,j}}{dt} = \tau_i A_{i,j} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_k} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{m_p} A_{k,l} A_{p,q} (HB(U_{k,l}, U_{p,q}), U_{i,j}^{*(1)})_{\mathring{J}}, \\ A_{i,j}(0) = A_{i,j}^{(0)} = (U_0, U_{i,j}^*)_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \\ j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

D'autre part, si nous prenons $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, nous savons d'après l'étude du § IV,3.3, que pour un nombre fini de τ_i on a $\Re \tau_i = O(\lambda - \lambda_c)$, les autres $\tau_i \in \sigma(\mathbf{HT}_\lambda)$ restant de parties réelles négatives. C'est sur cette remarque que se fonde l'étude asymptotique de [11] en isolant le système correspondant aux τ_i de parties réelles voisines de 0, moyennant des hypothèses sur les ordres de grandeur des amplitudes d'indices supérieurs.

VI. PROBLÈME NON LINÉAIRE STATIONNAIRE. BIFURCATION

VI.1. FORMULATION

Nous avons vu, à l'aide de (V,2,1), que le problème consiste à chercher s'il existe une solution de (V,2,3) dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, autre que la solution 0 évidente a priori. Nous pourrions, au lieu d'utiliser $H_2 \cap \mathcal{W}$, faire l'étude dans $\mathcal{W}$ qui paraît plus naturel ici. En fait, cela n'apporte aucun changement dans les résultats, et seulement quelques modifications de notations, notamment en ce qui concerne le choix des vecteurs propres des opérateurs adjoints.

Nous avons donc à examiner les solutions non nulles de l'équation :

$$(1,1) \quad U = \lambda(1 - A_o)^{-1} A_1 U + (1 - A_o)^{-1} B(U, U).$$

Pour résoudre ce problème nous utilisons la méthode de Liapounov-Schmidt qu'ont développée en particulier Vainberg et Trenogin dans leur article de synthèse [49].

Remarquons d'abord que les opérateurs intervenant dans le second membre de (1,1) sont complètement continus, d'où, d'après un théorème de [5] page 192 la bifurcation ne peut avoir lieu qu'au voisinage d'une valeur de λ telle que $1 - \lambda(1 - A_o)^{-1} A_1$ ne soit pas inversible, c'est-à-dire au voisinage d'un point de $\sigma(T_\lambda)$. Nous savons déjà que pour $\lambda = 0$, T_o est inversible; notons alors

$$(1,2) \quad \lambda_o = \inf \{ \mathbb{R}^+ \cap \sigma(T_\lambda) \},$$

et nous supposons dans la suite que $\lambda_o < \infty$ est vérifié*. Il en résulte que pour $\lambda \in [0, \lambda_o[$, la solution 0 de (1,1) est isolée (il n'y a pas bifurcation). Dans la suite, pour l'étude de la bifurcation, λ reste dans un voisinage de λ_o , $\mathcal{V}(\lambda_o)$.

VI.2. DÉCOMPOSITION ET RÉOLUTION PARTIELLE DU SYSTÈME

Notons $\mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda)$ le sous-espace invariant associé à la valeur propre λ_o^{-1} de l'opérateur $(1 - A_o)^{-1} A_1$, et notons dans ce chapitre $E(\lambda_o)$ la projection que nous notions précédemment $E_{(T_\lambda)}(\lambda_o)$. Alors, $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$ on a $U = \bar{U} + V$ avec $\bar{U} = E(\lambda_o)U$ et $V = [1 - E(\lambda_o)]U$. Le sous-espace parcouru par V est noté $\mathcal{P}(\lambda_o; T_\lambda)$ et l'on peut écrire la somme directe :

$$H_2 \cap \mathcal{W} = \mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda) \oplus \mathcal{P}(\lambda_o; T_\lambda).$$

Nous appelons encore multiplicité de λ_o , la dimension finie m de $\mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda)$. L'indice de λ_o (en fait, l'indice de λ_o^{-1} pour l'opérateur $(1 - A_o)^{-1} A_1$) est noté ν .

Décomposons maintenant (1,1) suivant $\mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda)$ et $\mathcal{P}(\lambda_o; T_\lambda)$ sous-espaces invariants par l'opérateur $(1 - A_o)^{-1} A_1$. Pour cela, il faut remarquer que l'on a d'après (IV,2,4) :

$$(2,1) \quad [1 - E(\lambda_o)][1 - \lambda(1 - A_o)^{-1} A_1]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(1 - A_o)(\lambda - \lambda_o)^n,$$

* Cf. exemple au Chapitre IX.

la série convergeant dans $\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. Il en résulte immédiatement les identités suivantes (grâce au fait que $E(\lambda_0)$ commute avec $(1-A_0)^{-1}A_1$) :

$$(2,2) \quad \begin{cases} E(\lambda_0) \Theta_n (1-A_0) = \Theta_n (1-A_0) E(\lambda_0) = 0, \\ E(\lambda_0) \Theta_n A_1 = \Theta_n A_1 E(\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, nous savons que l'opérateur $[1 - \lambda_0 (1-A_0)^{-1}A_1]$ est inversible dans $\mathcal{P}(\lambda_0; T_\lambda)$, par construction. Si l'on fait tendre $\lambda \rightarrow \lambda_0$ dans (2,1) on a immédiatement (dans $\mathcal{P}(\lambda_0; T_\lambda)$) :

$$(2,3) \quad [1 - \lambda_0 (1-A_0)^{-1}A_1]^{-1} = \Theta_0 (1-A_0).$$

Il en résulte que la projection de (1,1) dans $\mathcal{P}(\lambda_0; T_\lambda)$, s'écrit :

$$(2,4) \quad \begin{cases} V = (\lambda - \lambda_0) \Theta_0 A_1 V + \Theta_0 B(U, U), \\ V = [1 - E(\lambda_0)] U, \end{cases}$$

et dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ on a l'équation :

$$(2,5) \quad [1 - \lambda (1-A_0)^{-1}A_1] \bar{U} = E(\lambda_0) (1-A_0)^{-1} B(U, U).$$

Transformons cette dernière équation en tenant compte du fait que l'opérateur $[1 - \lambda_0 (1-A_0)^{-1}A_1]$ est nilpotent dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ (la puissance ν ième étant identiquement nulle). En fait on peut écrire (2,5) sous la forme :

$$\{[1 - \lambda_0 (1-A_0)^{-1}A_1] - \lambda^{-1}(\lambda - \lambda_0) 1\} \bar{U} = \lambda^{-1} \lambda_0 E(\lambda_0) (1-A_0)^{-1} B(U, U),$$

ce qui nous permet d'obtenir aisément :

$$(2,6) \quad \bar{U} + \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\lambda_0 \lambda^{-n-1}}{(\lambda - \lambda_0)^n} [1 - \lambda_0 (1-A_0)^{-1}A_1]^{n-1} E(\lambda_0) (1-A_0)^{-1} B(\bar{U} + V, \bar{U} + V) = 0,$$

où $U = \bar{U} + V$, (2,6) étant équivalent à (2,5).

Le but de ce chapitre est la résolution du système (2,4), (2,6) dans le cas général et plus précisément dans certains cas particuliers. Pour cela résolvons d'abord (2,4) par rapport à V puis, reportons l'expression de V fonction de $\bar{U}$ et $\lambda - \lambda_0$ dans (2,6), afin de pouvoir ensuite résoudre par rapport à $\bar{U}$ en fonction de $\lambda - \lambda_0$.

L'équation (2,4) est de la forme :

$$(2,7) \quad V - G(\bar{U}, \lambda - \lambda_0, V) = 0,$$

et, en supposant $\|\bar{U}\|$ et $|\lambda - \lambda_0|$ suffisamment petits, nous pouvons utiliser le théorème des fonctions implicites pour résoudre (2,7) par rapport à V . En effet l'application $(\bar{U}, \lambda - \lambda_0, V) \rightarrow V - G(\bar{U}, \lambda - \lambda_0, V)$ est développable en série de Taylor convergente dans $H_2 \cap \mathcal{W} \times \mathbb{R} \times H_2 \cap \mathcal{W}$, à valeurs dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, et l'on a $0 - G(0, 0, 0) = 0$ et l'opérateur $1 - G_v(0, 0, 0) = 1$ qui est inversible. D'où, d'après [49], $\exists \varepsilon_0$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour $\|\bar{U}\| < \varepsilon_0$ et $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$, alors $\exists V$ solution de (2,4), unique dans un voisinage de 0 , et développable en série de Taylor par rapport à $(\bar{U}, \lambda - \lambda_0)$:

$$(2,8) \quad V = \sum_{i,j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_i^{(j)}(\bar{U}, \dots, \bar{U}),$$

où $A_i^{(j)}$ est un opérateur j -linéaire dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, continu par rapport à tous ses arguments, dans la boule $\|\bar{U}\| < \varepsilon_0$. En procédant par identification on obtient de manière évidente :

$$A_i^{(0)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_i^{(1)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

et

$$A_i^{(2)}(\bar{U}, \bar{U}) = [\Theta_0 A_i] \Theta_0 B(\bar{U}, \bar{U}), i = 0, 1, 2, \dots$$

De plus, notant $B^{(e)}(U, V) = B(U, V) + B(V, U)$, on a :

$$(2,9) \quad \begin{cases} A_0^{(3)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) = \Theta_0 B^{(e)}[\bar{U}, A_0^{(2)}(\bar{U}, \bar{U})], \\ A_i^{(3)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) = \sum_{n=0}^i (\Theta_0 A_n) \Theta_0 B^{(e)}[\bar{U}, A_{i-n}^{(2)}(\bar{U}, \bar{U})], \\ A_0^{(4)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) = \Theta_0 B^{(e)}[\bar{U}, A_0^{(3)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U})] + \Theta_0 B[A_0^{(2)}(\bar{U}, \bar{U}), A_0^{(2)}(\bar{U}, \bar{U})]. \end{cases}$$

Les autres $A_i^{(j)}$ se calculent aisément, mais ne présentent pas d'intérêt pour la suite.

Remplaçons maintenant V par son expression (2,8) dans l'équation (2,6). Nous obtenons ce que l'on appelle « l'équation de bifurcation » :

$$(2,10) \quad (\lambda - \lambda_0)^\nu \bar{U} + R(\bar{U}, \lambda - \lambda_0) = 0,$$

où R est développable en série de Taylor au voisinage de $(0, 0)$. De plus, d'après ce que nous avons vu pour (2,8), on a :

$$R_i^{(e)} = R_i^{(a)} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, \text{ et } R_i^{(a)} = 0 \text{ pour } i \geq \nu,$$

si l'on a noté :

$$R(\bar{U}, \lambda - \lambda_0) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i R_i^{(j)}(\bar{U}, \dots, \bar{U}).$$

C'est alors que nous faisons l'hypothèse que l'identité

$$(2,11) \quad E(\lambda_0) T_0^{-1} B(\bar{U}, \bar{U}) = 0,$$

est vérifiée $\forall \bar{U} \in \mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$. Cette hypothèse est justifiée par le fait de la double périodicité de $T_0^{-1} B(\bar{U}, \bar{U})$ relativement à $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ sur lequel projette $E(\lambda_0)$. Notons que (2,11) a été montré dans certains cas particuliers par exemple par V.I. Iudovich* dans [26] et par K. Kirchgässner et P. Sorger dans [32] (au lemme 7). Pour notre part nous le montrerons au chapitre IX dans le cas du problème de Bénard.

L'hypothèse (2,11) nous permet alors d'écrire : $R_i^{(a)} = 0$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$ puisque $\forall i$, la quantité $E(\lambda_0) T_0^{-1} B(\bar{U}, \bar{U})$ est en facteur dans $R_i^{(a)}(\bar{U}, \bar{U})$. Il en résulte que « le terme de plus bas degré » dans le développement de Taylor de $R(\bar{U}, \lambda - \lambda_0)$ est $\lambda_0^\nu [T_0^{-1} T_\lambda]^{-1} F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U})$ où l'on a noté :

$$F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) \equiv E(\lambda_0) T_0^{-1} B^{(e)}(\bar{U}, A_0^{(2)}(\bar{U}, \bar{U})).$$

Nous ne détaillerons pas plus, pour le moment, le développement de $R(\bar{U}, \lambda - \lambda_0)$ car cela ne servirait à rien. Il s'agit maintenant de résoudre (2,10) par rapport à $\bar{U}$, en fonction de $\lambda - \lambda_0$, après avoir éliminé la solution banale $\bar{U} = 0$.

VI.3. RÉOLUTION DANS LE CAS GÉNÉRAL

On cherche s'il existe une solution $\bar{U}$ de (2,10) dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ différente de $\bar{U} \equiv 0$, et développable en série de puissances de $(\lambda - \lambda_0)^\alpha, \alpha > 0$. Pour cela on est amené à considérer « l'équation approchée » de (2,10), groupant les termes d'ordre le moins élevé (sorte de diagramme de Newton [49]) :

$$(3,1) \quad (\lambda - \lambda_0)^\nu \bar{U} + \lambda_0^\nu [T_0^{-1} T_\lambda]^{-1} F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) = 0.$$

Cherchons donc, en premier lieu, si (3,1) admet une solution non triviale, développable en $(\lambda - \lambda_0)^\alpha$. Associons lui l'équation

$$(3,2) \quad \Psi(\bar{U}) \equiv \bar{U} + \lambda_0^\nu [T_0^{-1} T_\lambda]^{-1} F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) = 0,$$

* Dans [26], V.I. Iudovich note $R_{20}(U)$ le terme qui correspond chez nous à $T_0^{-1} B(U, U)$. De plus, il note φ_0 le vecteur propre de $T_0^{-1} A_1$ pour la valeur propre λ_0^{-1} , et note ψ_0 le vecteur propre de l'adjoint. Il affirme alors qu'il est clair que $(R_{20}(\varphi_0), \psi_0) = 0$. Ceci est pour nous, un cas particulier de (2,11) qui est utilisable même quand l'indice est supérieur à 1.

et supposons dans la suite de ce paragraphe que (3,2) admet une solution $\bar{U}_0 \neq 0$. Alors $\bar{U} = (\lambda - \lambda_0)^{\nu/2} \bar{U}_0$ est solution de (3,1) et l'on peut espérer que c'est la représentation asymptotique d'une solution de (2,10) quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Définissons donc $\bar{V}$ tel que $\bar{U} = (\lambda - \lambda_0)^{\nu/2} (\bar{U}_0 + \bar{V})$ avec $\|\bar{V}\| = o(1)$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$, et écrivons que (2,10) est vérifiée.

Posant $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ et éliminant $\varepsilon^{\nu/2}$ en facteur, (2,10) devient :

$$(3,3) \quad \Psi(\bar{U}_0 + \bar{V}) + R_1(\bar{U}_0 + \bar{V}, \varepsilon) = 0,$$

$$\text{avec} \quad R_1(\bar{U}, \varepsilon) = \varepsilon R_1^{(3)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) + \varepsilon^{\nu/2} R_0^{(4)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) + \sum_{\substack{i+j \geq 5 \\ j \geq 3}}^{\infty} \varepsilon^{i+(j-3)\nu/2} R_i^{(j)}(\bar{U}, \dots, \bar{U}).$$

Mais, par hypothèse $\Psi(\bar{U}_0) = 0$, et (3,3) peut s'écrire :

$$(3,4) \quad \Psi'_{\bar{U}_0} \cdot \bar{V} + R_2(\bar{U}_0, \bar{V}) + R_1(\bar{U}_0 + \bar{V}, \varepsilon) = 0,$$

$$\text{avec} \quad \|R_2(\bar{U}_0, \bar{V})\| = O(\|\bar{V}\|^2) \quad \text{quand} \quad \|\bar{V}\| \rightarrow 0,$$

$$\text{et} \quad \Psi'_{\bar{U}_0} = 1 + \lambda_0^{\nu} [T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{\nu-1} [F_0(\cdot, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + F_0(\bar{U}_0, \cdot, \bar{U}_0) + F_0(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \cdot)].$$

Si l'on fait alors l'hypothèse que l'opérateur linéaire $\Psi'_{\bar{U}_0}$ est inversible dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_{\lambda_0})$ (dimension m finie), on peut résoudre (3,4) en faisant appel au théorème des fonctions implicites. En effet, le premier membre de (3,4) est développable en série de Taylor par rapport à $\bar{V}$ et en série de puissances de ε et $\varepsilon^{\nu/2}$; de plus pour $\varepsilon = 0$ on a la solution unique $\bar{V} = 0$ et en ce point la dérivée partielle de Fréchet de ce premier membre par rapport à $\bar{V}$ est inversible. Il en résulte qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que si l'on a $\varepsilon \in [0, \delta_0[$, $\exists$ une solution unique $\bar{V}$ de (3,4), développable en série de puissances de ε et $\varepsilon^{\nu/2}$, qui s'annule pour $\varepsilon = 0$. Le premier terme du développement de $\bar{V}$ est alors :

$$\text{si } \nu > 2 \quad \bar{V} = -\varepsilon \Psi_{\bar{U}_0}'^{-1} \cdot R_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + O[\varepsilon^{\inf(2, \nu/2)}],$$

$$\text{si } \nu = 2 \quad \bar{V} = -\varepsilon \Psi_{\bar{U}_0}'^{-1} \cdot [R_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + R_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0)] + O(\varepsilon^2),$$

$$\text{si } \nu = 1 \quad \bar{V} = -\varepsilon^{1/2} \Psi_{\bar{U}_0}'^{-1} \cdot R_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + O(\varepsilon).$$

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 7 - Bifurcation dans le cas général.

Pourvu que l'hypothèse (2,11) soit vérifiée et sous réserve que l'équation $\Psi(\bar{U}) = 0$ [défini par (3,2)] admette au moins une solution $\bar{U}_0 \neq 0$ dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_{\lambda_0})$ et que $\Psi'_{\bar{U}_0}$ y soit inversible, alors $\exists \delta_0 > 0$ tel que si l'on a $0 < \lambda - \lambda_0 < \delta_0$, $\exists$ au moins une solution U non nulle de (1,1) développable en série de puissances de $(\lambda - \lambda_0)$ et $(\lambda - \lambda_0)^{\nu/2}$, ν étant l'indice de λ_0 . De plus, on peut écrire les deux premiers termes du développement de U :

pour $\nu = 1$

$$(3,5) \quad U = (\lambda - \lambda_0)^{1/2} \bar{U}_0 + (\lambda - \lambda_0) [-\Psi_{\bar{U}_0}'^{-1} \cdot R_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + A_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)] + O[(\lambda - \lambda_0)^{3/2}],$$

pour $\nu = 2$

$$U = (\lambda - \lambda_0) \bar{U}_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 \{-\Psi_{\bar{U}_0}'^{-1} \cdot [R_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + R_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0)] + A_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)\} + O[(\lambda - \lambda_0)^3],$$

pour $\nu > 2$

$$U = (\lambda - \lambda_0)^{\nu/2} \bar{U}_0 - (\lambda - \lambda_0)^{1+\nu/2} \Psi_{\bar{U}_0}'^{-1} \cdot R_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + O[(\lambda - \lambda_0)^{\inf(\nu, 2+\nu/2)}],$$

avec

$$R_1^{(0)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) = [(\nu-1)(T_0^{-1}T_{\lambda_0})^{\nu-1} + (T_0^{-1}T_{\lambda_0})^{\nu-2}] \lambda_0^{\nu-1} F_0(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + \lambda_0^\nu (T_0^{-1}T_{\lambda_0})^{\nu-1} F_1(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0),$$

$$R_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) = \lambda_0^\nu (T_0^{-1}T_{\lambda_0})^{\nu-1} E(\lambda_0) T_0^{-1} \{ B[A_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0), A_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)] + B^{(0)}[\bar{U}_0, A_0^{(0)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0)] \},$$

et

$$F_1(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) = E(\lambda_0) T_0^{-1} B^{(0)}[\bar{U}_0, A_1^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)].$$

Remarque :

Si $\bar{U}_0$ est solution de $\Psi(\bar{U}) = 0$, $-\bar{U}_0$ est aussi solution grâce à l'impairité de Ψ et $\Psi'_{-\bar{U}_0} = \Psi'_{\bar{U}_0}$. Il en résulte l'existence d'une deuxième solution non nulle de (1,1). Mais il est possible que les deux solutions ainsi obtenues ne représentent qu'un seul et même écoulement, défini par exemple à une translation près.

VI.4. QUELQUES CAS PARTICULIERS

Examinons certains cas particuliers où l'on peut préciser dans quelle mesure l'équation $\Psi(\bar{U}) = 0$ admet une solution non nulle dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$.

VI.4.1. Cas où la dimension du sous-espace $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ est impaire

On suppose ici m impair, l'indice ν étant quelconque a priori. On peut alors formuler des hypothèses plus précises sur Ψ . Soit la sphère unité de $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$: $S = \{\bar{U}; \bar{U} \in \mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda), \|\bar{U}\| = 1\}$, ici $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, mais la dimension m étant finie, cette norme est équivalente à la norme euclidienne habituelle. Faisons alors l'hypothèse suivante :

$$(4,1) \quad \forall \bar{U} \in S, \quad \lambda_0^\nu [T_0^{-1}T_{\lambda_0}]^{\nu-1} F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) \neq 0.$$

Dans le cas $\nu=1$, cela revient à supposer $\forall \bar{U} \in S, F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) \neq 0$. Nous pouvons alors appliquer un théorème classique de topologie algébrique : « le théorème du hérisson »* qui nous permet d'affirmer qu'il existe un nombre $K \neq 0$ et (« un piquant ») $V_0 \in S$ tels que

$$(4,2) \quad KV_0 + \lambda_0^\nu [T_0^{-1}T_{\lambda_0}]^{\nu-1} F_0(V_0, V_0, V_0) = 0.$$

Si l'on suppose $K > 0$, ce qui revient à imposer la bifurcation à droite de λ_0 , et que l'on pose $\bar{U}_0 = K^{-1/2} V_0$, on vérifie que $\Psi(\bar{U}_0) = 0$. Posons $\Psi_1(\bar{U}) \equiv -\bar{U} + \lambda_0^\nu [T_0^{-1}T_{\lambda_0}]^{\nu-1} F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U})$, alors si $K < 0$, $\bar{U}_0 = (-K)^{-1/2} V_0$ vérifie $\Psi_1(\bar{U}_0) = 0$. Nous pouvons alors énoncer :

Corollaire du théorème 7

Si la multiplicité de λ_0 est impaire et si l'hypothèse (4,1) est vérifiée, alors $\exists \bar{U}_0 \neq 0$ solution soit de $\Psi(\bar{U}) = 0$ soit de $\Psi_1(\bar{U}) = 0$. Si, de plus, $\Psi'_{\bar{U}_0}$ (resp. $\Psi'_{1\bar{U}_0}$) est inversible, on a le résultat annoncé au théorème 7 [resp. après avoir changé $(\lambda - \lambda_0)$ en $(\lambda_0 - \lambda)$].

Remarque - Les modifications à apporter dans la démonstration du théorème dans le cas $\Psi_1(\bar{U}_0) = 0$ (bifurcation à gauche de λ_0) sont évidentes.

VI.4.2. Cas où la multiplicité de λ_0 vaut 1

Etudions le cas particulier du précédent où $\nu=m=1$. Nous trouverons une application de cette situation au chapitre IX.

* The Hedgehog Theorem [5] page 93.

Nous devons, pour ce faire, préciser le vecteur propre qui engendre $\mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda)$:

$$(4,3) \quad \mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda) = \{ \mu U^{(o)}; \mu \in \mathbb{C} \}.$$

Notons $V^{(o)}$ le vecteur propre de l'opérateur adjoint $[T_o^{-1} T_\lambda]^*$ dans $H_2 \cap \mathcal{W}$, associé à λ_o^{-1} . Alors on a $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$:

$$E(\lambda_o)U = (U, V^{(o)})U^{(o)} = AU^{(o)}, \quad (U^{(o)}, V^{(o)}) = 1,$$

le produit scalaire étant pris dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. Notons encore, pour simplifier l'écriture :

$$(4,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = A_o^{(2)}(U^{(o)}, U^{(o)}) = \Theta_o B(U^{(o)}, U^{(o)}), \\ V_2 = A_o^{(3)}(U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}) = \Theta_o B^{(o)}(U^{(o)}, V_1), \\ V_3 = A_o^{(4)}(U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}) = \Theta_o \{ B^{(o)}(U^{(o)}, V_2) + B(V_1, V_1) \}, \\ \gamma_o = - (T_o^{-1} B^{(o)}(U^{(o)}, V_1), V^{(o)}), \\ \gamma_1 = - (T_o^{-1} [B^{(o)}(U^{(o)}, V_2) + B(V_1, V_1)], V^{(o)}), \\ \gamma_o^1 = - (T_o^{-1} B^{(o)}(U^{(o)}, \Theta_o A_1 V_1), V^{(o)}), \\ \gamma_2 = - (T_o^{-1} [B^{(o)}(U^{(o)}, V_3) + B^{(o)}(V_1, V_2)], V^{(o)}). \end{array} \right.$$

Remarquons en passant que V_1 n'est autre que la solution du problème suivant :

$$(4,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\lambda_o} V = B(U^{(o)}, U^{(o)}), \\ E(\lambda_o) V = 0, \end{array} \right.$$

et l'on a des définitions analogues pour V_2 et V_3 . Avec ces notations, l'équation de bifurcation s'écrit :

$$(4,6) \quad [(\lambda - \lambda_o)A + (R(AU^{(o)}, \lambda - \lambda_o), V^{(o)})]U^{(o)} = 0,$$

et l'on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned} (R_o^{(2)}(U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}), V^{(o)}) &= -\lambda_o \gamma_o, \\ (R_o^{(4)}(U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}), V^{(o)}) &= -\lambda_o \gamma_1, \\ (R_o^{(5)}(U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}), V^{(o)}) &= -\lambda_o \gamma_2, \\ (R_1^{(3)}(U^{(o)}, U^{(o)}, U^{(o)}), V^{(o)}) &= -\lambda_o \gamma_o^1. \end{aligned}$$

De plus, $\Psi(\bar{U}) \equiv (A - \lambda_o \gamma_o A^3)U^{(o)}$, et si l'on fait l'hypothèse que $\gamma_o > 0$, alors on trouve

$$\bar{U}_o = \pm (\lambda_o \gamma_o)^{-1/2} U^{(o)}.$$

En fait, l'hypothèse $\gamma_o \neq 0$ est essentielle pour prouver l'existence de $\bar{U}_o = A_o U^{(o)}$ solution de $\Psi(\bar{U}) = 0$ ou de $\Psi_1(\bar{U}) = 0$; le fait de supposer $\gamma_o > 0$ nous impose une bifurcation « à droite » de λ_o . Nous avons choisi ce signe, éclairé par les démonstrations, en particulier, de **V.I. ludovich** dans [26]* au théorème 1.1 et de **Kirchgässner et Sorger** [32] (la notant « -a₃ »).

Calculons l'opérateur $\Psi'_{\bar{U}_o}$: il peut être assimilé à un scalaire puisque c'est un opérateur linéaire d'un espace à une dimension dans lui-même. On trouve

$$\Psi'_{\bar{U}_o} = 1 - 3\lambda_o \gamma_o A_o^2 \text{ avec } A_o = \pm (\lambda_o \gamma_o)^{-1/2},$$

* Dans [26], la quantité $R_{1o}^{(3)}(v, \varphi_o)$ n'est autre que $T_o^{-1} B^{(o)}(U^{(o)}, V)$, et le v correspond exactement à notre V . Le produit scalaire employé dans [26] est effectué dans $\mathcal{W}$; nous avons vu qu'il suffit de changer $V^{(o)}$ pour s'y ramener.

d'où $\Psi'_{\bar{u}_0}$ représente une homotétie dans $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda)$ de rapport -2 . Son inverse $\Psi'^{-1}_{\bar{u}_0}$ est donc l'homotétie de rapport $-1/2$ et l'on peut appliquer (3,5) qui donne* :

$$(4,7) \quad U = \pm \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \gamma_0} \right)^{1/2} U^{(0)} + \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \gamma_0} \right) \left[V_1 - \frac{\gamma_1}{2 \gamma_0} U^{(0)} \right] + O[(\lambda - \lambda_0)^{3/2}] .$$

Il faut remarquer que, dans ce cas, pour calculer les termes d'ordre supérieur à $(\lambda - \lambda_0)$, il est préférable d'utiliser directement l'équation de bifurcation, très simple dans ce cas particulier :

$$(4,8) \quad (\lambda - \lambda_0)A - \lambda_0 \gamma_0 A^3 - \lambda_0 \gamma_1 A^4 - \lambda_0 \gamma_0^4 (\lambda - \lambda_0) A^3 - \lambda_0 \gamma_2 A^5 + \dots = 0 ,$$

les termes suivants de (4,8) sont d'ordres $A^6, (\lambda - \lambda_0)A^4, (\lambda - \lambda_0)^2 A^3$. Notons $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ et divisons (4,8) par A qui est en facteur et qui représente la solution banale $U=0$. Nous obtenons :

$$(4,9) \quad \varepsilon - \lambda_0 \gamma_0 A^2 - \lambda_0 \gamma_1 A^3 - \lambda_0 \gamma_0^4 \varepsilon A^2 - \lambda_0 \gamma_2 A^4 + \dots = 0 ,$$

et (4,9) est résoluble par rapport à ε , d'après le théorème des fonctions implicites, sous la forme :

$$(4,10) \quad \varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A^i \quad \text{pour } |A| < \delta .$$

On a immédiatement : $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \lambda_0 \gamma_0$, $\alpha_3 = \lambda_0 \gamma_1$, $\alpha_4 = \lambda_0^2 \gamma_0 \gamma_0^4 + \lambda_0 \gamma_2$, $\dots$ et si l'on note $\eta = \pm \sqrt{\varepsilon (\lambda_0 \gamma_0)^{-1}}$, on obtient :

$$\eta = A \left[1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} A + \left(\lambda_0 \gamma_0^4 + \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \right) A^2 + \dots \right]^{1/2} ,$$

et cela permet de résoudre en A , sous la forme

$$(4,11) \quad A = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \eta^i$$

avec $b_1 = 1$, $b_2 = -\gamma_1 (2 \gamma_0)^{-1}$, $b_3 = 5/8 [\gamma_1 \gamma_0^4]^2 - (2 \gamma_0)^{-1} (\lambda_0 \gamma_0 \gamma_0^4 + \gamma_2)$, $\dots$ et l'on retrouve bien (4,7) à l'aide de

$$V = A^2 V_1 + A^3 V_2 + O(A^4, \varepsilon A^2) .$$

Nous remarquons que le troisième terme du développement (4,7) s'écrit :

$$(4,12) \quad \pm \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \gamma_0} \right)^{3/2} \left[V_2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} V_1 + \left\{ \frac{5}{8} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)^2 - \frac{\lambda_0 \gamma_0 \gamma_0^4 + \gamma_2}{2 \gamma_0} \right\} U^{(0)} \right] ,$$

et l'on voit déjà qu'il fait intervenir suffisamment de termes pour rendre compliquée l'application d'une formule générale du type (3,5) avec plus de termes explicites.

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 8 - Bifurcation dans le cas $m=1$.

Pourvu que l'on ait :

$$(4,13) \quad (T_0^{-1} B(U^{(0)}, U^{(0)}), V^{(0)}) = 0 ,$$

$$(4,14) \quad -(T_0^{-1} B^{(0)}(U^{(0)}, V_1), V^{(0)}) > 0$$

V_1 étant la solution du problème (4,5), alors il existe un nombre $\delta_0 > 0$ tel que pour $0 < \lambda - \lambda_0 < \delta_0$, il existe deux solutions non nulles de (1,1), et deux seulement, admettant le développement en série de puissances de $(\lambda - \lambda_0)^{1/2}$, (4,7) - (4,12); tandis que pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, 0 est solution isolée de (1,1) dans un voisinage indépendant de λ .

*Les deux premiers termes du développement (4,7) ont été indiqués pour un cas particulier dans [27].

La dernière proposition est conséquence du fait que nos calculs montrent grâce à $\gamma_0 > 0$ qu'il n'y a pas bifurcation pour $\lambda < \lambda_0$. Notons que nous montrons au chapitre IX que γ_0 est > 0 pour le cas du problème de Bénard.

VI.5. CAS OÙ B DÉPEND ANALYTIQUEMENT DE $\lambda \in I$

Certains auteurs (par exemple [32]) obtiennent par leur choix du paramètre λ représentatif du problème, une autre formulation que (1,1) pour le problème stationnaire. En fait, il peut arriver que λ intervienne dans le terme non linéaire. Nous allons traiter dans ce paragraphe le cas où $\lambda \rightarrow B_\lambda$ est analytique par rapport à $\lambda \in I$, c'est-à-dire que pour $\lambda \in \mathcal{U}(\lambda_0)$ on peut écrire :

$$B_\lambda(U, U) = B_0(U, U) + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{1!} B_1(U, U) + \dots + \frac{(\lambda - \lambda_0)^n}{n!} B_n(U, U) + \dots$$

cette série convergeant absolument dans $H_2 \cap \mathcal{W}$.

A la place de (1,1) nous devons considérer l'équation :

$$(5,1) \quad U = \lambda T_0^{-1} A_1 U + T_0^{-1} B_\lambda(U, U).$$

Celle-ci se décompose sous la forme :

$$(5,2) \quad \begin{cases} \bar{U} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda^{n-1}}{(\lambda - \lambda_0)^n} [T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{n-1} E(\lambda_0) (1 - A_0)^{-1} B_\lambda(\bar{U} + V, \bar{U} + V) = 0, \\ V = (\lambda - \lambda_0) \Theta_0 A_1 V + \Theta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^n}{n!} B_n(\bar{U} + V, \bar{U} + V), \end{cases}$$

$$(5,3)$$

et l'on obtient l'équation de bifurcation de la même manière que précédemment. Nous sommes alors amené à faire l'hypothèse suivante [pour les mêmes raisons qui conduisent à (2,11)] :

$$(5,4) \quad E(\lambda_0) T_0^{-1} B_\lambda(\bar{U}, \bar{U}) = 0, \quad \forall \lambda \in I, \forall \bar{U} \in \mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda).$$

Notons pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} F_{n,i}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) &= E(\lambda_0) T_0^{-1} B_n^{(i)}[\bar{U}, V_i^{(2)}(\bar{U}, \bar{U})], \\ V_i^{(2)}(\bar{U}, \bar{U}) &= (\Theta_0 A_1)^i \Theta_0 B_0(\bar{U}, \bar{U}) + (\Theta_0 A_1)^{i-1} \frac{1}{1!} B_1(\bar{U}, \bar{U}) + \dots + \frac{1}{i!} B_i(\bar{U}, \bar{U}), \\ V_0^{(3)}(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}) &= \Theta_0 B_0^{(3)}[\bar{U}, V_0^{(2)}(\bar{U}, \bar{U})], \\ V &= \sum_{\substack{j \geq 2, i \geq 0}} (\lambda - \lambda_0)^i V_i^{(j)}(\bar{U}, \dots, \bar{U}). \end{aligned}$$

L'expression correspondant à $\Psi(\bar{U})$, défini en (3,2), est ici :

$$(5,5) \quad \chi(\bar{U}) \equiv \bar{U} + \lambda_0^\nu [T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{\nu-1} F_0(\bar{U}, \bar{U}, \bar{U}).$$

Moyennant (5,4) et des hypothèses sur χ analogues à celles faites sur Ψ on trouve un théorème analogue au théorème 7 : si on note $\chi(\bar{U}_0) = 0$, alors la solution U s'écrit :

pour $\nu = 1$

$$(5,6) \quad U = (\lambda - \lambda_0)^{1/2} \bar{U}_0 + (\lambda - \lambda_0) [-\chi_{\bar{U}_0}^{\nu-1} \mathcal{R}_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + V_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)] + O[(\lambda - \lambda_0)^{3/2}],$$

pour $\nu = 2$

$$(5,7) \quad U = (\lambda - \lambda_0) \bar{U}_0 + (\lambda - \lambda_0)^2 \{-\chi_{\bar{U}_0}^{\nu-1} [\mathcal{R}_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + \mathcal{R}_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0)] + V_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)\} + O[(\lambda - \lambda_0)^3],$$

pour $\nu > 2$

$$(5,8) \quad U = (\lambda - \lambda_0)^{\nu/2} \bar{U}_0 - (\lambda - \lambda_0)^{1+\nu/2} \chi_{\bar{U}_0}^{\nu-1} \mathcal{R}_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + O[(\lambda - \lambda_0)^{\inf(\nu, 2+\nu/2)}],$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) &= \{(\nu-1)[T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{\nu-1} + [T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{\nu-2}\} \lambda_0^{\nu-1} F_{00}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + \\ &\quad + \lambda_0^\nu [T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{\nu-1} [F_{10}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) + F_{01}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0)], \\ \mathcal{R}_0^{(4)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0) &= \lambda_0^\nu [T_0^{-1} T_{\lambda_0}]^{\nu-1} E(\lambda_0) T_0^{-1} \{B_0[V_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0), V_0^{(2)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0)] + B_0^{(0)}[U_0, V_0^{(3)}(\bar{U}_0, \bar{U}_0, \bar{U}_0)]\}. \end{aligned}$$

On remarque alors que pour $\nu = 1$ les deux premiers termes du développement sont les mêmes que si l'on avait $B_\lambda \equiv B_{\lambda_0} = B_0$, tandis que pour $\nu \geq 2$ la dépendance de B par rapport à λ intervient dès le deuxième terme.

VII. PROBLÈME NON LINÉAIRE INSTATIONNAIRE. ÉCHANGE DES STABILITÉS

VII.1. HYPOTHÈSES

VII.1.1. Définition de l'échange des stabilités

Nous avons défini λ_c au § IV,7.3 et nous avons adjoint à sa définition, l'hypothèse (IV,7,12). Définissons maintenant une situation qui se produit dans certains cas particuliers comme nous le verrons au chapitre IX pour le problème de Bénard.

Définition

Nous dirons qu'il y a «échange des stabilités» si, pour $\lambda = \lambda_c$, dans le cadre de l'hypothèse (IV,7,12), il n'y a qu'une valeur propre de partie réelle nulle, pour HT_{λ_c} qui est zéro. On notera dans ce cas $\lambda_c = \lambda_0$.

Il existe donc un vecteur propre $U \neq 0$ tel que $HT_{\lambda_0}U = 0$ et l'injectivité de H entraîne que $T_{\lambda_0}U = 0$. Il en résulte que $\lambda_0 \in \sigma(T_\lambda)$ et donc que T_λ admet, au voisinage de λ_0 , le développement (IV,2,4) (si l'indice de λ_0 vaut ν). En fait, nous supposons essentiellement dans ce chapitre que la multiplicité de λ_0 vaut 1 (donc $\nu=1$). Or, nous savons par construction que pour $\lambda \in [0, \lambda_0[$, le spectre de HT_λ est strictement dans le demi-plan des parties réelles négatives, il en résulte qu'aucun élément de $\sigma(T_\lambda)$ n'est dans cet intervalle puisque, dans le cas contraire, 0 serait dans $\sigma(HT_\lambda)$ et cela contredirait notre définition de λ_0 . On en déduit que l'on est dans la situation décrite au § VI,4.3, dont nous emprunterons dorénavant les notations. En particulier, nous savons, dès lors que les hypothèses (VI,4,13) et (VI,4,14) sont réalisées, qu'il existe pour $0 < \lambda - \lambda_0 < \delta_0$ deux solutions stationnaires secondaires non triviales.

VII.1.2. Hypothèses restrictives

En plus de l'hypothèse sur la multiplicité de λ_0 , nous faisons dans ce chapitre l'hypothèse que l'indice de la valeur propre 0 de HT_{λ_0} vaut 1. Celle-ci est nécessaire si l'on ne veut pas compliquer les calculs, afin de pouvoir arriver à une conclusion. En résumé on a :

Hypothèses* dans le cadre de «l'échange des stabilités»

(1,1) $\dim \mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda) = 1$,

(1,2) l'indice de la valeur propre {0} de HT_{λ_0} est égal à 1.

* Ces hypothèses sont vérifiées sur un exemple au chapitre IX.

Nous verrons au chapitre IX et au chapitre X (commentaires) que cette hypothèse est réalisée pour certains cas particuliers.

Il résulte aisément de (1,1) et (1,2) que

$$(1,3) \quad \mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda) = \mathcal{E}(0; HT_{\lambda_o}) = \left\{ \mu U^{(o)}; \mu \in \mathbb{C} \right\},$$

$$(1,4) \quad \begin{cases} E_{(HT_{\lambda_o})}^{(o)} \cdot E_{(T_\lambda)}(\lambda_o) = E_{(T_\lambda)}(\lambda_o), \\ E_{(T_\lambda)}(\lambda_o) \cdot E_{(HT_{\lambda_o})}^{(o)} = E_{(HT_{\lambda_o})}^{(o)}, \end{cases}$$

et que l'on peut trouver $W^{(o)}$ tel que $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$:

$$(1,5) \quad E_{(HT_{\lambda_o})}^{(o)} U = (U, W^{(o)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} U^{(o)}, \quad (U^{(o)}, W^{(o)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} = 1, \quad (HT_{\lambda_o})^* W^{(o)} = 0,$$

en rappelant que l'on a

$$(1,6) \quad E_{(T_\lambda)}(\lambda_o) U = (U, V^{(o)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} U^{(o)}, \quad (U^{(o)}, V^{(o)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} = 1, \quad (T_o^{-1} T_{\lambda_o})^* V^{(o)} = 0.$$

Il résulte de (1,5) que, comme $W^{(o)} \in \mathcal{D}_2[(HT_{\lambda_o})^*]$, il vérifie :

$$W^{(o)} \in \mathcal{D}_2[(HT_o)^*] \subseteq \mathcal{D}_2[(T_o^{-1} T_{\lambda_o})^* (HT_o)^*] \subseteq \mathcal{D}_2[(HT_{\lambda_o})^*],$$

puisque $\mathcal{D}_2(HT_o) = \mathcal{D}_2(HT_\lambda)$ par hypothèse, et en utilisant une propriété classique des opérateurs adjoints de produit d'opérateurs linéaires non nécessairement bornés. Il vient :

$$(T_o^{-1} T_{\lambda_o})^* (HT_o)^* W^{(o)} = 0.$$

$$\text{Or, } \dim \mathcal{E}[0; (T_o^{-1} T_{\lambda_o})^*] = \dim \mathcal{E}[\lambda_o^{-1}; (T_o^{-1} A_1)^*] = \dim \mathcal{E}[\lambda_o^{-1}; T_o^{-1} A_1] = \dim \mathcal{E}(\lambda_o; T_\lambda) = 1,$$

d'après une propriété classique des opérateurs compacts. Il en résulte que $W^{(o)}$ et $V^{(o)}$ sont liés par la relation :

$$(1,7) \quad (HT_o)^* W^{(o)} = \mu V^{(o)}$$

pour un certain $\mu \in \mathbb{C}$. Nous notons que $V^{(o)}$ et $W^{(o)}$ n'ont aucune raison, a priori, d'être colinéaires.

VII,2. FORMULATION COMPLÈTE DU PROBLÈME

Nous avons vu au § V,3.1 que le problème non linéaire instationnaire général peut se formuler dans $C^0([0, \tau]; H_2 \cap \mathcal{W})$ sous la forme :

$$(2,1) \quad U(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) U_o + \mathcal{B}(U, U; \lambda).$$

Nous allons, à l'aide des hypothèses formulées au § VII,1, transformer (2,1) afin de la résoudre dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$ bien que $\lambda > \lambda_o$! C'est-à-dire que nous allons montrer que la solution reste bornée quand $t \rightarrow \infty$ (nous en connaissons l'existence sur $[0, \tau]$ par le théorème 3).

VII,2.1. Spectre de HT_λ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_o)$

Appliquons le Lemme 4 au point $\zeta_o = 0$, valeur propre de multiplicité 1 de HT_{λ_o} . On en déduit qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_o| < \delta$, $\exists$ une et une seule valeur propre $\xi(\lambda)$ analytique en $(\lambda - \lambda_o)$, vérifiant $\xi(0) = 0$, et réelle; de plus on a

$$(2,2) \quad \begin{cases} E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)] = E_{(HT_{\lambda_0})}(0) + (\lambda - \lambda_0) E_1(\lambda), \\ \dim \mathcal{E}(\xi(\lambda); HT_\lambda) = 1, \end{cases}$$

où $\lambda \rightarrow E_1(\lambda)$ est analytique dans $\mathcal{V}(\lambda_0)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. L'analyticité de ξ se déduit aisément de la démonstration du théorème de Rellich que nous avons utilisé au § IV,3.3 ; quant au fait que $\xi(\lambda)$ est réelle cela vient du fait que si elle ne l'était pas, $\bar{\xi}(\lambda)$ serait valeur propre, puisque l'opérateur HT_λ est réel, et vérifierait $\bar{\xi}(\lambda) = O(\lambda - \lambda_0)$ ce qui n'est pas possible d'après le Lemme 4. Choisissons alors comme base de $\mathcal{E}(\xi(\lambda); HT_\lambda)$ le vecteur

$$(2,3) \quad U_1(\lambda) = U^{(0)} + O(\lambda - \lambda_0).$$

La projection $E_{(HT_\lambda)}(\xi)$ vérifie alors, $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$

$$(2,4) \quad \begin{cases} E_{(HT_\lambda)}(\xi)U = (U, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}} U_1 \quad \text{avec} \quad W_1(\lambda) = W^{(0)} + O(\lambda - \lambda_0), \\ \text{et} \quad (U_1, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}} = 1. \end{cases}$$

D'autre part, comme nous l'avons vu au § IV,6.4, on peut séparer le spectre de $\sigma(HT_\lambda)$ en deux morceaux pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. D'un côté (à droite) on a $\xi(\lambda)$ voisin de l'origine, de l'autre on a le reste du spectre à gauche d'un contour Λ , du type du contour Λ'_2 du § IV,6.4, dont la partie segmentaire a une abscisse $\tilde{\xi} < 0$ indépendante de $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. On définit alors $P_\lambda = 1 - E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)]$ comme en (IV,6,13), et l'on a la décomposition suivante de $H_2 \cap \mathcal{W}$: $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$

$$(2,5) \quad \begin{cases} U = X + Y, \\ X = E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)]U = (U, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}} U_1 = A U_1, \\ Y = P_\lambda U. \end{cases}$$

VII,2.2. Décomposition de l'équation (2,1) - Première forme

Décomposons alors l'équation (2,1) sur $\mathcal{E}(\xi; HT_\lambda) \oplus \mathcal{P}(\xi; HT_\lambda) = H_2 \cap \mathcal{W}$, on obtient aisément à partir de (IV,6,12), (IV,6,14) :

$$(2,6) \quad \begin{cases} X(t) = e^{\xi t} X_0 - \int_0^t e^{\xi(t-\tau)} E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)] HB[U(\tau), U(\tau)] d\tau, \\ Y(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) Y_0 + P_\lambda \mathcal{B}(U, U; \lambda), \end{cases}$$

avec $\begin{cases} X_0 = E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)] U_0, \\ Y_0 = P_\lambda U_0. \end{cases}$

Notons dorénavant

$$\tilde{\mathcal{B}}(U, V; \lambda) = P_\lambda \mathcal{B}(U, V; \lambda) = - \int_0^t P_\lambda \mathcal{I}(t-\tau; HB[U(\tau), V(\tau)]) d\tau$$

avec

$$P_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda e^{\xi t} R(\tau; HT_\lambda) d\tau,$$

alors, de la même manière qu'au § V,3.2, à l'aide de (IV,7.2) et de (IV,7.10), on montre que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, on peut écrire

$$(2,7) \quad \tilde{\mathfrak{B}}(U, V; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \tilde{\mathfrak{B}}_n(U, V),$$

où $(U, V) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}_n(U, V)$ est bilinéaire continue de $\{C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})\}^2$ dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$, la série (2,7) convergeant absolument dans cet espace. De plus, on a les estimations :

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}_n(U, V)\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq Y \delta^{-n} J(t, \xi) \|U\| \cdot \|V\|,$$

pour $n \geq 1$, et $\tilde{\mathfrak{B}}_0(U, V) \equiv \tilde{\mathfrak{B}}(U, V; \lambda_0)$ pour $n=0$, où Y est une constante > 0 , $\delta > 0$ définissant un disque de $\mathbb{C}$ où la série (2,7) converge.

Modifions la première équation du système (2,6) en utilisant l'identité :

$$(2,8) \quad E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)] HB(U, U) = E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)] HT_\lambda [T_\lambda^{-1} B(U, U)] = HT_\lambda E_{(HT_\lambda)}[\xi(\lambda)] T_\lambda^{-1} B(U, U) = \xi E_{(HT_\lambda)}(\xi) T_\lambda^{-1} B(U, U),$$

et en la mettant sous la forme d'équation différentielle équivalente; (2,6) devient :

$$(2,9) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \xi [X - E_{(HT_\lambda)}(\xi) T_\lambda^{-1} B(U, U)] , \\ X(0) = X_0 , \\ Y(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) Y_0 + \tilde{\mathfrak{B}}(U, U; \lambda) . \end{cases}$$

Précisons le terme non linéaire de la première équation de (2,9), en nous plaçant dans le cadre de l'hypothèse (VI,4,13) et en utilisant (IV,2,4) avec $\nu = 1$, c'est-à-dire :

$$(2,10) \quad T_\lambda^{-1} = -\lambda_0 (\lambda - \lambda_0)^{-1} E_{(T_\lambda)}(\lambda_0) T_0^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n (\lambda - \lambda_0)^n.$$

On peut alors écrire (grâce à (1,4) et (2,2)) :

$$(2,11) \quad E_{(HT_\lambda)}(\xi) T_\lambda^{-1} B(U, U) = -\lambda_0 (\lambda - \lambda_0)^{-1} (E_{(T_\lambda)}(\lambda_0) T_0^{-1} B^{(0)}(X^{(0)}, Y), V^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} U_1 - (\lambda - \lambda_0)^{-1} C(Y, Y) U_1 - R_1(X, Y; \lambda) U_1,$$

$$\text{avec} \quad X^{(0)} = A U^{(0)} = (X, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}} U^{(0)}$$

$$(2,12) \quad C(Y, Y) = \lambda_0 (T_0^{-1} B(Y, Y), V^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}}$$

et R_1 développable en série de Taylor par rapport à $(X, Y, \lambda - \lambda_0)$ sous la forme :

$$(2,13) \quad R_1(X, Y; \lambda) = \sum_{\substack{n=0 \\ i+j=2}}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{1n}^{(i,j)}(X, \dots, X, Y, \dots, Y),$$

où $(X, Y) \rightarrow R_{1n}^{(i,j)}(X, \dots, X, Y, \dots, Y)$ est homogène de degré i et continue par rapport à X , et homogène de degré j et continue par rapport à Y .

Notons encore, de manière analogue à $B^{(0)}$:

$$\tilde{\mathfrak{B}}^{(0)}(U, V; \lambda) = \tilde{\mathfrak{B}}(U, V; \lambda) + \tilde{\mathfrak{B}}(V, U; \lambda);$$

le système (2,9) devient :

$$(2,14) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \xi \left\{ A + \lambda_0 (\lambda - \lambda_0)^{-1} A (T_0^{-1} B^{(0)}(U^{(0)}, Y), V^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} + (\lambda - \lambda_0)^{-1} C(Y, Y) + R_1(X, Y; \lambda) \right\}, \\ A(0) = A_0 = (U_0, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \\ Y(t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) Y_0 + \tilde{\mathfrak{B}}(X, X; \lambda) + \tilde{\mathfrak{B}}^{(0)}(X, Y; \lambda) + \tilde{\mathfrak{B}}(Y, Y; \lambda). \end{cases}$$

VII,2.3. Décomposition de l'équation (2,1) - Forme finale

Pour résoudre (2,14) nous sommes tenté de résoudre d'abord l'équation en $\mathcal{Y}$ par rapport à $\mathcal{Y}$ en fonction de $(X, \lambda - \lambda_0)$ en les supposant de normes suffisamment petites. Cela est possible, mais ne nous avance pas plus que si l'on avait appliqué brutalement le théorème 3, car si l'on remplace $\mathcal{Y}$ par son expression au moyen de X et $\lambda - \lambda_0$ dans la première équation de (2,14), on obtient une équation différentielle en A dont on ne peut rien tirer. C'est pourquoi nous sommes amené à extraire la partie principale de $\mathcal{Y}$ quand $\|X\|$ et $|\lambda - \lambda_0|$ sont petits, car c'est celle-ci qui nous donne les termes prépondérants dans l'équation différentielle.

A cette fin, nous allons intégrer par parties la quantité $\tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda)$ afin de sortir sa partie principale, en utilisant le fait que l'on a, dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ l'identité :

$$(2,15) \quad HT_\lambda \mathcal{I}(t; HT_\lambda) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) HT_\lambda = \frac{d}{dt} \mathcal{I}(t; HT_\lambda)$$

pour $t > 0$. En effet dans $\mathcal{D}_2(HT_\lambda)$ la première égalité est vérifiée, mais comme on l'a vu au § IV,6.3, pour $t > 0$ le premier opérateur est borné dans $H_2 \cap \mathcal{W}$. Comme $\mathcal{D}_2(HT_\lambda)$ est dense on peut étendre l'égalité à tout $H_2 \cap \mathcal{W}$. La deuxième égalité est évidente. On a enfin

$$(2,16) \quad \tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda) = P_\lambda T_\lambda^{-1} B[X(t), X(t)] - \mathcal{I}(t; HT_\lambda) P_\lambda T_\lambda^{-1} B(X_0, X_0) - \\ - \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) P_\lambda T_\lambda^{-1} B^{(0)}[X(\tau), \frac{dX}{d\tau}(\tau)] d\tau.$$

Il faut alors remarquer, d'après (2,2) et (2,10) que l'on a :

$$(2,17) \quad P_\lambda T_\lambda^{-1} = \lambda_0 E_1(\lambda_0) E_1(\lambda_0) T_0^{-1} + P_\lambda \Theta_0 + O(\lambda - \lambda_0),$$

c'est-à-dire que l'opérateur linéaire borné $P_\lambda T_\lambda^{-1}$ est développable en série de Taylor de λ dans $\mathcal{U}(\lambda_0)$. Il en résulte qu'en utilisant encore (VI,4,13), on peut écrire :

$$(2,18) \quad P_\lambda T_\lambda^{-1} B(X, X) = A^2 P_\lambda \Theta_0 B(U^{(0)}, U^{(0)}) + R_2(X, X; \lambda)$$

où R_2 est quadratique en X et développable en série de Taylor par rapport à λ dans $\mathcal{U}(\lambda_0)$:

$$(2,19) \quad R_2(X, X; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A^2 R_2^{(n)}.$$

Notons $\mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda)$ le terme intégrale dans (2,16) et $\mathcal{F}(X, Y; \lambda)$ le deuxième membre de la première équation de (2,9). Remarquons alors que $\mathcal{F}(X, Y; \lambda)$ admet un développement en série de Taylor par rapport à λ dans $\mathcal{U}(\lambda_0)$ de la forme :

$$(2,20) \quad \mathcal{F}(X, Y; \lambda) = [\mathcal{F}_0^{(1,1)}(X, Y) + \mathcal{F}_0^{(0,2)}(Y, Y)] + \sum_{\substack{n=1 \\ i+j=2}}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [\xi_n X + \mathcal{F}_n^{(i,j)}(X, \dots, X, Y, \dots, Y)],$$

où $\xi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \xi_n$ et $\mathcal{F}_n^{(i,j)}$ est défini de manière analogue à $R_{1n}^{(i,j)}$. Maintenant, pour mettre en évidence la partie principale de $\tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda)$, nous ne devons pas laisser $\mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda)$ tel quel, car nous ne savons rien a priori sur $\frac{dX}{dt}$. Pour l'éliminer, il suffit de remplacer $\frac{dX}{dt}$ par $\mathcal{F}(X, Y; \lambda)$ qui lui est égal; nous obtenons ainsi

$$(2,21) \quad \tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda) = A^2 P_\lambda \Theta_0 B(U^{(0)}, U^{(0)}) + R_2(X, X; \lambda) + \mathcal{R}_1[X, \mathcal{F}(X, Y; \lambda); \lambda] - \\ - \mathcal{I}(t; HT_\lambda) P_\lambda T_\lambda^{-1} B(X_0, X_0),$$

et tous les facteurs sont développables en série de Taylor par rapport à $\lambda \in \mathcal{U}(\lambda_0)$ [pour $\mathcal{R}_1$ cela résulte du développement (IV,7,2) et de (IV,7,10)]. Notons* enfin

$$(2,22) \quad \Upsilon(U_0, \lambda, t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) P_\lambda \left\{ P_\lambda U_0 - P_\lambda T_\lambda^{-1} B[E(\xi)U_0, E(\xi)U_0] \right\};$$

* Nous notons $\Upsilon(U_0, \lambda, t)$ sous la forme (2,22), afin de mettre en évidence la dépendance en U_0 .

le système (2,14) devient alors :

$$(2,23) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \xi \left\{ A + \lambda_o (\lambda - \lambda_o)^{-1} A (T_o^{-1} B^{(o)}(U^{(o)}, Y), V^{(o)})_{H_2 \cap W} + (\lambda - \lambda_o)^{-1} C(Y, Y) + R_1(X, Y; \lambda) \right\}, \\ A(o) = A_o, \\ Y(t) = Y(U_o, \lambda, t) + A^2 P_o \otimes B(U^{(o)}, U^{(o)}) + R_2(X, X; \lambda) + \mathfrak{R}_1[X, \mathfrak{F}(X, Y; \lambda); \lambda] + \\ + \tilde{\mathfrak{B}}^{(o)}(X, Y; \lambda) + \tilde{\mathfrak{B}}(Y, Y; \lambda). \end{cases}$$

C'est ce système que nous allons résoudre.

VII.3. RÉOLUTION DU SYSTÈME

VII.3.1. Résolution de la deuxième équation en Y

Pour résoudre (2,23), nous commençons par résoudre la deuxième équation par rapport à Y , puis nous reportons la solution dans la première, en mettant en évidence la partie principale; enfin nous résolvons l'équation différentielle en A qui reste alors.

Considérons donc l'équation en Y dans (2,23). On remarque d'abord que si l'on fait $U_o = 0$ et $X = 0$ alors $Y(U_o, \lambda, t) = 0$ et l'équation n'est vérifiée que pour $Y = 0$. Procédons alors comme au théorème 3, en utilisant le théorème des fonctions implicites dans le cas où le second membre admet un développement de Taylor par rapport à la variable

$$(Y, X, Y, \lambda) \in \{C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)\}^3 \times \mathbb{C}.$$

Nous considérons Y comme un nouveau paramètre, pour simplifier la démonstration. L'équation est de la forme

$$(3,1) \quad Y - \tilde{\mathfrak{F}}(Y, X^{(o)}, Y, \lambda) = 0 \quad (X^{(o)} = AU^{(o)} = (X, W_1)_{H_2 \cap W}, U^{(o)})$$

dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$, et la dérivée de Fréchet $\tilde{\mathfrak{F}}'_Y(0, 0, 0, \lambda_o) = 0$. Il en résulte l'existence

d'une solution $Y = \mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda)$ de (3,1) pour $(\|Y\| + \|X^{(o)}\| + |\lambda - \lambda_o|) < \varepsilon_o$; de plus elle admet un développement de Taylor dans ce voisinage de $(0, 0, \lambda_o)$. Ecrivons les premiers termes de ce développement :

$$(3,2) \quad \mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda) = Y + A^2 P_o \otimes B(U^{(o)}, U^{(o)}) + \tilde{\mathfrak{B}}^{(o)}(X^{(o)}, Y; \lambda_o) + \tilde{\mathfrak{B}}(Y, Y; \lambda_o) + \sum_{\substack{i+j+k \geq 3 \\ j+k \geq 1}} (\lambda - \lambda_o)^k \mathfrak{Y}_i^{(j,k)}(Y, \dots, Y, X^{(o)}, \dots, X^{(o)})$$

les notations étant évidentes et la convergence ayant lieu dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$.

VII.3.2. Résolution du système (2,23)

Remplaçons dans la première équation du système (2,23) Y par $\mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda)$ et remarquons que les résultats du paragraphe précédent sont vrais a fortiori dans $C^0([0, T]; H_2 \cap W) \quad \forall T > 0$. Introduisons quelques notations afin de simplifier l'écriture :

$$(3,3) \quad \begin{cases} \mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda) = Y + A^2 P_o \otimes B(U^{(o)}, U^{(o)}) + \mathfrak{R}_2(Y, X^{(o)}, \lambda), \\ \mathfrak{h}(Y, \lambda) = \lambda_o (\lambda - \lambda_o)^{-1} (T_o^{-1} B^{(o)}[U^{(o)}, Y], V^{(o)})_{H_2 \cap W}, \\ \mathfrak{f}(Y, X^{(o)}, \lambda) = \lambda_o (\lambda - \lambda_o)^{-1} (T_o^{-1} B^{(o)}[X^{(o)}, \mathfrak{R}_2(Y, X^{(o)}, \lambda)], V^{(o)})_{H_2 \cap W} + (\lambda - \lambda_o)^{-1} C[\mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda), \mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda)] \\ + R_1[X^{(o)}, W^{(o)}]_{H_2 \cap W}, U_1(\lambda), \mathfrak{Y}(Y, X^{(o)}, \lambda); \lambda]; \end{cases}$$

et l'on remarque que la fonction $(Y, A, \lambda) \longrightarrow \xi f(Y, AU^{(0)}, \lambda)$ de $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W) \times C^0([0, \infty[; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ dans $C^0([0, \infty[; \mathbb{R})$ est développable en série de Taylor dans un voisinage de $(0, 0, \lambda_0)$ (puisque $\xi = O(\lambda - \lambda_0)$).

Notons encore que l'on a d'après (1,4) :

$$[1 - E(\lambda_0)]P_{\lambda_0} = [1 - E(\lambda_0)] [1 - E(0)] = 1 - E(\lambda_0),$$

il en résulte la décomposition [en utilisant (VI,2,2)] :

$$(3,4) \quad P_{\lambda_0} \otimes B(U^{(0)}, U^{(0)}) = E(\lambda_0) P_{\lambda_0} \otimes B(U^{(0)}, U^{(0)}) + \otimes B(U^{(0)}, U^{(0)}).$$

Le premier terme du second membre étant colinéaire à $U^{(0)}$, en utilisant les notations (VI,4.4) et l'hypothèse (VI,4.13), on obtient :

$$(3,5) \quad (T_0^{-1} B^{(0)} [U^{(0)}, P_{\lambda_0} \otimes B(U^{(0)}, U^{(0)})], V^{(0)})_{H_2 \cap W} = -\gamma_0.$$

L'équation différentielle en A devient alors :

$$(3,6) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \xi \{ A + A h(Y, \lambda) - \lambda_0 (\lambda - \lambda_0)^{-1} \gamma_0 A^3 + f(Y, AU^{(0)}, \lambda) \}, \\ A(0) = A_0 = (U_0, W_1)_{H_2 \cap W}. \end{cases}$$

Plaçons nous dans la boule de centre 0 , dans $C^0([0, T]; \mathbb{R})$, définie par $B_1 = \{ A; \sup_{t \in [0, T]} |A(t)| \leq \varepsilon_1 < 1 \}$ et supposons que U_0 ait été choisi tel que, pour $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0$, on ait $\|Y\| \leq \varepsilon_1^2$, $|\xi h(Y(t), \lambda)| \leq \varepsilon_1^2 e^{\xi t}$. Il est évidemment toujours possible de choisir $\varepsilon_1, \delta_0, U_0$ tels que la série (3,2) converge dans $C^0([0, T]; H_2 \cap W)$. Dans ces conditions on a les inégalités (pour $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0$) :

$$(3,7) \quad \begin{cases} |\xi f_t(Y, AU^{(0)}, \lambda)| \leq \gamma [\varepsilon_1^4 + (\lambda - \lambda_0) \varepsilon_1^2], \\ |\xi f_t(Y, A_2 U^{(0)}, \lambda) - \xi f_t(Y, A_1 U^{(0)}, \lambda)| \leq \gamma \sup_{t \in [0, T]} |A_2(t) - A_1(t)| [\varepsilon_1^3 + |\lambda - \lambda_0| \varepsilon_1]. \end{cases}$$

Le second membre de l'équation (3,6) étant lipschitzien par rapport à A et continu par rapport à t , il en résulte que l'on peut appliquer un théorème que l'on trouve dans [9] page 38, qui affirme qu'il existe une solution unique $A(t)$ de (3,6), dérivable sur $[0, T]$, où $T = (|A_0| - \varepsilon) \gamma_1 \cdot [\varepsilon_1^3 + (\lambda - \lambda_0) \varepsilon_1]^{-1}$, γ_1 étant une certaine constante positive.

Montrons maintenant que lorsque t varie $A(t)$ reste dans une boule intérieure à B_1 , ce qui démontrera que $A(t)$ est prolongeable sur $[0, \infty[$. Pour cela, remarquons que $h(Y(t), \lambda)$ devient petit quand t croît à cause de Y qui tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Puis, fixons nous une certaine constante $\tilde{\gamma} > 2(\lambda_0 \gamma_0)^{1/2}$, et choisissons $\varepsilon_1 = \tilde{\gamma} |\lambda - \lambda_0|^{1/2}$ avec $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0$, δ_0 adéquat. Enfin supposons U_0 tel que $|A_0| \leq k \varepsilon_1 < \varepsilon_1$, alors $T = (1 - k) \gamma_1 (1 + \tilde{\gamma}^2)^{-1} |\lambda - \lambda_0|^{-1}$ et $\exists \delta_1 \leq \delta_0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta_1$, $\exists T_1 < T$ tel que $\forall t \in [T_1, T], |h(Y(t), \lambda)| \leq \varepsilon_1$. En effet, ceci est possible grâce à la présence du facteur $\exp(\xi t)$ dans l'estimation de $|\xi h(Y(t), \lambda)|$. Multiplions alors (3,6) par A ; cela donne :

$$(3,8) \quad \frac{1}{2} \frac{dA^2}{dt} = \xi \{ A^2 + A^2 h(Y, \lambda) - \lambda_0 \gamma_0 (\lambda - \lambda_0)^{-1} A^4 + A f(Y, AU^{(0)}, \lambda) \},$$

et pour $t \in [T_1, T]$, on a l'estimation :

$$|A^2 + A^2 h(Y, \lambda) + A f(Y, AU^{(0)}, \lambda)| \leq A^2 + \gamma_2 |A| |\lambda - \lambda_0|,$$

où γ_2 est une certaine constante indépendante de $|A| \leq \varepsilon_1$ et de $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$. Alors si $|A(t)| > 2(\lambda_0 \gamma_0)^{-1/2} |\lambda - \lambda_0|^{1/2}$, pour un δ_2 adéquat, on a, puisque ξ est positif, $\frac{dA^2}{dt} < 0$ pourvu que $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \delta_0$.

Il en résulte que $\forall t \in [T_1, T], |A(t)| \leq \sup [A(T_1), 2(\lambda_0 \gamma_0)^{-1/2} (\lambda - \lambda_0)^{1/2}]$. Avec

notre choix de ε_1 et de $\tilde{\gamma}$, nous sommes assuré que $|A(t)|$ reste pour $t \geq T_1$ dans la boule $B_2 = \{A; \sup_{t \in [T_1, T]} |A(t)| \leq \sup[A(T_1), 2(\lambda_0 \gamma_0)^{-1/2} (\lambda - \lambda_0)^{1/2}]\}$ strictement intérieure à B_1 . Nous pouvons donc prolonger la solution de (3,6) sur $[T, +\infty[$ et nous énonçons (en modifiant quelque peu la notation des constantes) :

Théorème 9 - Existence d'une solution bornée sur $[0, \infty[$ dans le cas sur-critique de l'échange des stabilités

Dans le cadre de l'échange des stabilités, si les hypothèses (1,1), (1,2), (VI,4,13) et (VI,4,14) sont vérifiées, alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ et un voisinage à droite de λ_0 , $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$, tels que si $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_0)$ et si la condition initiale vérifie :

$$(3,9) \quad \begin{cases} |(U_0, W^{(0)})_{H_2 \cap W}| \leq \varepsilon_0 |\lambda - \lambda_0|^{1/2}, \\ \|P_{\lambda_0} U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_0 |\lambda - \lambda_0|, \end{cases}$$

alors il existe une solution unique U de (2,1) dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$. De plus $\exists \mu_0 > 0$ tel que $\forall t \geq 0$

$$(3,10) \quad \begin{cases} |(U(t), W^{(0)})_{H_2 \cap W}| \leq \mu_0 |\lambda - \lambda_0|^{1/2}, \\ \|P_{\lambda_0} U(t)\|_{H_2 \cap W} \leq \mu_0 |\lambda - \lambda_0|. \end{cases}$$

VII,4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION QUAND $\lambda \rightarrow \lambda_0$

VII,4.1. Comparaison de la solution avec celle d'une «équation approchée»

Considérons l'équation «approchée» :

$$(4,1) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \varepsilon A_1 [1 - \lambda_0 \gamma_0 (\lambda - \lambda_0)^{-1} A_1^2], \\ A_1(0) = (U_0, W^{(0)})_{H_2 \cap W}, \end{cases}$$

dont la solution s'écrit :

$$(4,2) \quad \frac{1}{A_1^2(t)} = \frac{1}{A_1^2(0)} e^{-2\varepsilon t} + \frac{\lambda_0 \gamma_0}{\lambda - \lambda_0} (1 - e^{-2\varepsilon t}).$$

Nous remarquons immédiatement que

$$|A_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (\lambda_0 \gamma_0)^{-1/2} (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$$

exponentiellement. Montrons que $\forall t > T$ suffisamment grand, $A_1(t)$ est la partie principale de $A(t)$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Remarquons d'abord que $|A(0) - A_1(0)| \leq \gamma_1 |\lambda - \lambda_0|^{3/2}$ pour une certaine constante γ_1 ne dépendant que de l'estimation (3,9) vérifiée par U_0 . Supposons alors qu'à $t=t_0$ on ait $|A(t_0) - A_1(t_0)| \leq M_1 (\lambda - \lambda_0)$. Alors, d'après (3,6) et (4,1) on a :

$$\begin{aligned} |A(t) - A_1(t)| &\leq |A(t_0) - A_1(t_0)| + \int_{t_0}^{t_0+t} \left| \frac{dA}{d\tau} - \frac{dA_1}{d\tau} \right| d\tau \\ &\leq M_1 (\lambda - \lambda_0) + \gamma (t - t_0) (\lambda - \lambda_0) \sup_{\tau \in (t_0, t_0+t)} |A(\tau) - A_1(\tau)| + M_0 (\lambda - \lambda_0)^{3/2}, \end{aligned}$$

où M_0 provient de $\varepsilon h(\gamma(t), \lambda)$ et γ est une constante positive ne dépendant que des termes non linéaires de (3,6) (après utilisation de (3,10)). Il en résulte que pour $t \in [t_0, t_0 + T]$ où $T = (\lambda - \lambda_0)^{-3/4}$

on a pour un certain $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$: $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_0) \Rightarrow |A(t) - A_1(t)| \leq K M_1 (\lambda - \lambda_0)$ où $K > 1$.

Supposons alors que $|A_0| \geq M_2 (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$; d'après (4,2) on a $|A_1(t)| \geq M_3 (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$, où M_3 ne dépend que de M_2 . D'où, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $|A(t)|^{-3} \leq [|A_1(t)| - |A(t) - A_1(t)|]^{-3} \leq M_4 (\lambda - \lambda_0)^{-3/2}$ où M_4 ne dépend que de M_2 et de $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$ (dépendance continue quand $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$ devient de diamètre évanescant).

Pour borner $|A(t) - A_1(t)|$ nous utilisons l'identité :

$$(4,3) \quad A^2(t) - A_1^2(t) = [A^2(t_0) A_1^2(t_0)]^{-1} A^2(t) A_1^2(t) [A^2(t_0) - A_1^2(t_0)] \exp[-2\xi(t-t_0)] + \\ + 2\xi A^2(t) A_1^2(t) \int_{t_0}^t \left\{ (A(\tau))^{-3} \left[\gamma(\tau), A(\tau) U^{(0)}; \lambda \right] + [A(\tau)]^{-2} h[\gamma(\tau), \lambda] \right\} e^{-2\xi(t-\tau)} d\tau,$$

alors $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, grâce à (3,7) et à l'estimation sur $\xi h(\gamma(t), \lambda)$, on trouve :

$$|A^2(t) - A_1^2(t)| \leq \gamma_2 (\lambda - \lambda_0)^{3/2},$$

où γ_2 est indépendant de t_0 , T et M_1 , pour un voisinage $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$ suffisamment petit. On en déduit : $|A(t) - A_1(t)| \leq \gamma_3 (\lambda - \lambda_0)$, où γ_3 est indépendant de t_0 , T et M_1 . Choisissons alors $M_1 > \gamma_3$, puis adaptons le voisinage $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$ de manière à pouvoir faire les estimations précédentes, on a alors le résultat suivant : si $|A(t_0) - A_1(t_0)| \leq M_1 (\lambda - \lambda_0)$ et $|A_0| \geq M_2 (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$ (M_2 évidemment plus petit que ε_0 de (3,9)), alors $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $|A(t) - A_1(t)| < M_1 (\lambda - \lambda_0)$.

Commençons par prendre $t_0 = 0$, puis itérons le raisonnement sur $[T, 2T], \dots, [nT, (n+1)T]$ nous obtenons que si $|A_0| \geq M_2 (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$ alors $|A(t) - A_1(t)|$ reste d'ordre $(\lambda - \lambda_0)$ $\forall t \in [0, \infty[$, c'est-à-dire que $A_1(t)$ est bien la partie principale de $A(t)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_0)$ et nous pouvons énoncer :

Corollaire du théorème 9 - Comportement de la solution quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 9, si l'on fait tendre λ vers λ_0 en supposant que U_0 continue à vérifier (3,9), alors $\exists \tau \geq 0$ tel que la solution $U(t)$ de (2,1) admette comme représentation asymptotique la solution de l'équation (4,1) sur $[\tau, +\infty[$. Celle-ci tend, quand $t \rightarrow \infty$, vers le premier terme du développement asymptotique d'une des deux solutions stationnaires secondaires (VI,4,7) dont l'existence est assurée par le théorème 8. On a

$$(4,4) \quad U(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pm (\lambda_0 \gamma_0)^{-1/2} (\lambda - \lambda_0)^{1/2} U^{(0)} + O(\lambda - \lambda_0),$$

le signe étant imposé par celui de $(U_0, W^{(0)})_{H_2 \cap W}$.

Pour finir la démonstration de ce corollaire, il reste à étudier le cas où A_0 est $O[(\lambda - \lambda_0)^{1/2}]$. En fait ceci ne cause aucune difficulté car les termes non linéaires sont d'ordre encore plus élevé pour $t \in \mathcal{V}^+(0)$ et seul le terme ξA du second membre de (3,6) est prépondérant. Or, la solution de $\left\{ \frac{dA}{dt} = \xi A, A(0) = A_0 \right\}$ est $A(t) = A_0 \exp(\xi t)$, et croît indéfiniment. D'où, $\exists$ un certain $\tau > 0$ où le terme $\xi A(t)$ est du même ordre que les autres, c'est-à-dire qu'il est d'ordre $[\xi (\lambda - \lambda_0)^{1/2}]$. On reprend alors le raisonnement en remplaçant l'origine des temps en τ et l'on est ramené au cas traité précédemment.

VII,4.2. Remarques en ce qui concerne l'évolution vers une solution stationnaire

Nous avons vu que si $t \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 0$ exponentiellement; alors si dans l'expression du développement de Taylor de $\mathfrak{Y}(\gamma, X^{(0)}; \lambda)$ on intègre par parties chaque terme où une intégrale sur $(0, t)$ intervient, de manière à mettre en évidence chaque fois la partie principale, de la même manière que pour $\mathfrak{B}(X, X; \lambda)$ par (2,21); puis, si l'on annule tous les termes qui tendent vers 0 exponentiellement quand $t \rightarrow \infty$, on obtient un développement en A et $\lambda - \lambda_0$ où t n'intervient plus explicitement. Il reste à savoir si ce développement converge et si le morceau que l'on a supprimé avait un sens. En supposant ceci réalisé, si on remplace γ par cette dernière expression dans la première équation du système (2,14), on obtient un second membre indépendant de t , et c'est cette équation qu'obtiennent nécessairement les auteurs cherchant un développement formel *a priori* de ce second membre (par exemple [14]).

Maintenant, pour savoir si $U(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{solution stationnaire}$, il est très difficile de passer par l'équation (3,6).

En effet, les seules solutions stationnaires étant celles du théorème 8, il ne faut pas oublier que la projection des équations sur $\mathcal{E}(\xi; HT_\lambda) \oplus \mathcal{P}(\xi; HT_\lambda)$ diffère de celle sur $\mathcal{E}(\lambda_0; T_\lambda) \oplus \mathcal{P}(\lambda_0; T_\lambda)$. Il vient :

$$\begin{aligned} E(\lambda_0)U &= X + E(\lambda_0)Y + [E(\lambda_0) - 1](\lambda - \lambda_0)E_1(\lambda)(X + Y) \\ [1 - E(\lambda_0)]U &= [1 - E(\lambda_0)]Y + (\lambda - \lambda_0)[1 - E(\lambda_0)]E_1(\lambda)(X + Y), \end{aligned}$$

et l'on remarque, quand $\lambda - \lambda_0$ est suffisamment petit, que l'on a

$$\begin{cases} E(\lambda_0)U \sim X \sim AU^{(0)}, \\ [1 - E(\lambda_0)]U \sim [1 - E(\lambda_0)]Y \sim [1 - E(\lambda_0)]P_{\lambda_0}Y, \end{cases}$$

puisque les autres termes sont d'ordre plus élevé. Par ailleurs, pour les termes d'ordre supérieur, nous ne retrouvons pas ceux de l'équation de bifurcation (VI,4,8), d'où la difficulté.

Il paraît plus réalisable de considérer la solution $U(\varepsilon)$, $\varepsilon \geq T$ assez grand, comme une perturbation d'ordre $O(\lambda - \lambda_0)$ de la solution bifurquée, et de montrer que celle-ci est stable pour cette perturbation. Pour ce faire, notons (VI,4,7) sous la forme :

$$U(\varepsilon) = \varepsilon U^{(0)} + \varepsilon^2 [V_1 - (2\gamma_0)^{-1}\gamma_1 U^{(0)}] + \dots$$

avec $\varepsilon = \pm(\lambda - \lambda_0)^{1/2} (\lambda_0 \gamma_0)^{-1/2}$. Le nouveau problème de stabilité s'écrit : $U = U_0 + U'$,

$$(4,5) \quad \begin{cases} \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon} = H[T_\lambda - B^{(0)}(U(\varepsilon), \cdot)]U' - HB(U', U'), \\ U'(0) = O(\lambda - \lambda_0). \end{cases}$$

De par leurs constructions, les opérateurs HT_λ et $HT'(\varepsilon) = H[T_{\lambda_0} - \lambda_0 \gamma_0 \varepsilon^2 A_1 - B^{(0)}[U(\varepsilon), \cdot]]$ sont de même structure, en conséquence on peut effectuer sur $HT'(\varepsilon)$ les mêmes opérations que celles faites sur HT_λ . En particulier on peut construire l'opérateur $G'(\varepsilon) = (HT'(\varepsilon) - \alpha 1)^{-1}$ avec le même α qu'au § IV,3. En effet l'opérateur $T'(\varepsilon) - \alpha \mathcal{C}_f$ est inversible pour $\varepsilon = 0$ puisque c'est $T_{\lambda_0} - \alpha \mathcal{C}_f$ et $\lambda_0 \in I$. Il en résulte que $[T'(\varepsilon) - \alpha \mathcal{C}_f]^{-1} \mathcal{C}_f$ est analytique d'après [45] pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$; c'est-à-dire que $G'(\varepsilon)$ vérifie pour $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$ les mêmes propriétés que $G(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(I)$. Or, pour $\varepsilon = 0$ nous connaissons le spectre de $G'(0)$, il en résulte de manière évidente, comme au § IV,4, que l'on a pour $HT'(\varepsilon)$ une valeur propre réelle, de partie réelle plus grande que toutes les autres, telle qu'elle admet dans $\mathcal{V}(0)$ un développement en série de puissances de ε , et sa multiplicité vaut 1. On écrit :

$$\sigma(\varepsilon) = \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots$$

la valeur propre en question, égale à 0 pour $\varepsilon = 0$, et

$$V(\varepsilon) = U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} + \dots$$

le vecteur propre associé, où nous imposerons $(V, V^{(0)})_{H_2 \cap W} = 1$ pour fixer le choix des $U^{(1)}, \dots$, pour $\varepsilon = 0$, $V(0) = U^{(0)}$ de manière évidente. Calculons les premiers termes de ces développements en utilisant :

$$(4,6) \quad \sigma(\varepsilon)V(\varepsilon) = H[T_{\lambda_0} - \lambda_0 \gamma_0 \varepsilon^2 A_1 - B^{(0)}[U(\varepsilon), \cdot]]V(\varepsilon).$$

A l'ordre 0, cela donne $HT_{\lambda_0} U^{(0)} = 0$, déjà connu. A l'ordre 1, il vient :

$$(4,7) \quad \sigma_1 U^{(0)} = HT_{\lambda_0} U^{(1)} - HB^{(0)}(U^{(0)}, U^{(0)}),$$

et (4,7) devient, d'après (VI,4,13) :

$$(4,8) \quad (T_0^{-1} \mathcal{C}_f \sigma_1 U^{(0)}, V^{(0)})_{H_2 \cap W} = 0,$$

puisque $(T_0^{-1} T_{\lambda_0})^* V^{(0)} = 0$. Or, $(T_0^{-1} \mathcal{C}_f U^{(0)}, V^{(0)})_{H_2 \cap W}$ n'a aucune raison d'être nul, et même

peut s'écrire :

$$(\mathbf{T}_0^{-1} \mathcal{C}_f U^{(o)}, V^{(o)})_{H_2 \cap W} = - (U^{(o)}, \mathcal{R} \mathbf{T}_0^{-1} * V^{(o)})_W$$

où l'adjoint $\mathbf{T}_0^{-1*}$ est pris dans $H_2 \cap W$. Il en résulte que $\sigma_1 = 0$. Il vient alors, d'après (4,7) et la définition de $V(\varepsilon)$ que l'on a :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_\lambda U^{(1)} = \mathbf{B}^{(o)}(U^{(o)}, U^{(o)}) = 2 \mathbf{B}(U^{(o)}, U^{(o)}), \\ (U^{(1)}, V^{(o)})_{H_2 \cap W} = 0. \end{cases}$$

Si nous comparons avec (VI,4,5), on obtient $U^{(1)} = 2 V_1$. A l'ordre 2, (4,6) donne :

$$(4,9) \quad \sigma_2 U^{(o)} = H[\mathbf{T}_\lambda U^{(2)} - \lambda_o \gamma_o A_1 U^{(o)} - \mathbf{B}^{(o)}(U^{(o)}, 2V_1) - \mathbf{B}^{(o)}(U^{(o)}, V_1 - (2\gamma_o)^{-1} \gamma_1 U^{(o)})],$$

puis, en utilisant (VI,4,13), (VI,4,4) et le fait que

$$[1 - \lambda_o \mathbf{T}_0^{-1} A_1] U^{(o)} = 0,$$

on obtient :

$$\sigma_2 (\mathbf{T}_0^{-1} \mathcal{C}_f U^{(o)}, V^{(o)})_{H_2 \cap W} = 0 - \gamma_o + 2\gamma_o + \gamma_o = 2\gamma_o,$$

d'où

$$\sigma_2 = -2\gamma_o (U^{(o)}, \mathcal{R} \mathbf{T}_0^{-1} * V^{(o)})_W^{-1},$$

où l'adjoint est pris dans $H_2 \cap W$. Faisons l'hypothèse que le nombre $(U^{(o)}, \mathcal{R} \mathbf{T}_0^{-1} * V^{(o)})_W$ est positif, alors

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_2 \varepsilon^2 + \sigma_3 \varepsilon^3 + \dots$$

est négatif d'ordre ε^2 , c'est-à-dire $\lambda - \lambda_o$, pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$. Il en résulte, puisque l'on peut encore construire un semi-groupe d'opérateurs de $\mathcal{L}(H_2 \cap W)$, de générateur infinitésimal $H\mathbf{T}'(\varepsilon)$, que l'on peut appliquer au problème (4,5) la théorie développée au chapitre V dans le cas sous-critique (corollaire du théorème 3). Pour montrer que $U'(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, il suffirait de montrer que $\|U(o)\|_{H_2 \cap W}$ vérifie la condition imposée par le corollaire du théorème 3. N'ayant pas d'expression générale (beaucoup trop compliquée) de $\mathcal{E}_o$ (notation du corollaire) nous ne pouvons pas savoir si cette condition est vérifiée. Néanmoins nous allons calculer dans ce cas particulier son ordre de grandeur. En effet, les constantes γ intervenant dans les formules correspondant à (IV,6,18) et (IV,6,20) pour $\mathcal{I}(t; H\mathbf{T}'(\varepsilon))$, avec un $\xi_4 < 0$ d'ordre $(\lambda - \lambda_o)$, sont d'ordre 1, c'est-à-dire sont indépendantes de $\varepsilon \in \mathcal{V}(o)$. D'autre part on a de manière immédiate $I(\infty, \xi_4) = O(|\xi_4|^{-1})$; il en résulte aisément d'après le § V,4.1 que $\mathcal{E}_o = O(\lambda - \lambda_o)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que si l'on a

$$\|U'(o)\|_{H_2 \cap W} \leq C |\lambda - \lambda_o|,$$

alors la solution $U'(t)$ de (4,5) tend, quand $t \rightarrow \infty$, vers 0. Le malheur est que, d'une part, calculer C est délicat, d'autre part l'ordre de grandeur de $U(o)$, c'est-à-dire, pour un certain τ , $\|U(\tau) - \mathcal{U}(\varepsilon)\|_{H_2 \cap W}$ est aussi délicat à calculer. Il semble que la seule méthode pour y arriver consiste à trouver dans (4,4) le terme d'ordre $(\lambda - \lambda_o)$, et que si ce terme correspond à celui de (VI,4,7), alors on a

$$\|U(\tau) - \varepsilon U^{(o)} - \varepsilon^2 [V_1 - (2\gamma_o)^{-1} \gamma_1 U^{(o)}]\|_{H_2 \cap W} \text{ d'ordre } (\lambda - \lambda_o)^{3/2},$$

c'est-à-dire infiniment petit devant $C |\lambda - \lambda_o|$. D'où, dans ce cas, $\exists \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$, on est sûr d'être dans un « bon voisinage » de $\mathcal{U}(\varepsilon)$, pour $t \geq \tau$, donc $U(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{U}(\varepsilon)$ dans $H_2 \cap W$. Enonçons tout de même :

Théorème 10 - Stabilité des solutions secondaires

Dans le cadre de l'échange des stabilités, si les hypothèses (1,1), (1,2), (VI,4,13), (VI,4,14) et

$$(4,10) \quad (\mathcal{R} U^{(o)}, \mathbf{T}_0^{-1} * V^{(o)})_W > 0$$

[où l'adjoint de T_0^{-1} est pris dans $H_2 \cap \mathcal{W}$ et $V^{(0)}$ tel que $(T_0^{-1} T_{\lambda_0})^* V^{(0)} = 0$] sont vérifiées, alors $\exists C > 0$ et un voisinage à droite de λ_0 , $\mathcal{V}^+(\lambda_0)$, tels que si $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_0)$ et que $\|U^{(0)}\|_{H_2 \cap \mathcal{W}} \leq C |\lambda - \lambda_0|$ alors il existe une solution unique $\mathcal{U}'$ de (4,5), dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W}) \cap C^1([0, \infty[; \dot{J}(\Omega))$ qui tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. On peut résumer ce fait en disant que les deux solutions « bifurquées » du théorème 8 sont stables.

Remarque - De manière évidente, on a

$$(T_0^{-1} \mathcal{U}^{(0)}, V^{(0)(4)})_{\mathcal{W}} = -(\mathcal{R} U^{(0)}, T_0^{-1} \star^{(4)} V^{(0)(4)})_J,$$

où $V^{(0)(4)}$ est tel que $(T_0^{-1} T_{\lambda_0})^{\star(4)} V^{(0)(4)} = 0$, l'adjoint étant pris dans $\mathcal{W}$ cette fois ci. Il en résulte qu'au lieu de (4,10) on peut écrire (4,11) $(\mathcal{R} U^{(0)}, T_0^{-1} \star^{(4)} V^{(0)(4)})_J > 0$ avec $(U^{(0)}, V^{(0)(4)})_{\mathcal{W}} = 1$, l'adjoint étant pris dans $\mathcal{W}$.

VIII. PROBLÈME NON LINÉAIRE INSTATIONNAIRE. NON ÉCHANGE DES STABILITÉS

VIII.1. HYPOTHÈSES*

VIII.1.1. Définition

Nous disons que nous sommes dans le cas de « non-échange des stabilités » si la situation décrite au § VII.1.1 n'est pas vérifiée. Mais, nous pouvons remarquer qu'un grand nombre de situations différentes peuvent se produire pour $\lambda = \lambda_c$. Tout ce dont nous sommes assuré, grâce à l'hypothèse (IV,7,12), c'est que pour $\lambda = \lambda_c$ il y a un nombre fini de valeurs propres de HT_{λ_c} de parties réelles nulles, les autres étant de parties réelles négatives. On peut même préciser que l'ensemble de ces valeurs propres est symétrique par rapport à l'axe réel, car l'opérateur HT_{λ_c} est réel. Il se peut même qu'une de ces valeurs propres soit nulle. De plus, il nous reste beaucoup d'incertitude quant à l'indice et la multiplicité finie de ces valeurs propres. C'est pourquoi, afin d'arriver au bout de nos raisonnements, nous sommes contraint de faire des hypothèses simplificatrices.

VIII.1.2. Hypothèses restrictives

Faisons des hypothèses du même type que celle du § VII.1.2.

Hypothèses dans le cadre du « Non-échange des stabilités »

$$(1,1) \quad \{\zeta; \zeta \in \sigma(HT_{\lambda_c}), \operatorname{Re} \zeta = 0\} = \{\zeta_0\} \cup \{\bar{\zeta}_0\} \neq \{0\},$$

$$(1,2) \quad \dim \mathcal{E}(\zeta_0; HT_{\lambda_c}) = 1.$$

Nous notons $\zeta_0 = i\eta_0$, $\eta_0 > 0$. Il résulte immédiatement de ces hypothèses que $\mathcal{E}(\bar{\zeta}_0; HT_{\lambda_c})$ est aussi de dimension 1, puisque $\overline{E(\zeta_0)}_{(HT_{\lambda_c})} = \overline{E(\zeta_0)}_{(HT_{\lambda_c})}$ grâce au fait que l'opérateur HT_{λ_c} est réel. De plus, notons la différence essentielle avec le chapitre VII, puisque λ_c n'est pas dans $\sigma(T_{\lambda})$, sinon 0 serait aussi valeur propre de HT_{λ_c} ce qui contredirait (1,1). Il en résulte que $\lambda \rightarrow T_{\lambda}^{-1}$ est analytique de $\mathcal{V}(\lambda_c) \rightarrow \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. Introduisons, comme au chapitre VII, quelques notations qui nous seront utiles : $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$

* Nous prenons systématiquement des notations semblables à celles du chapitre VII dès qu'il s'agit de quantités dont le rôle est analogue.

on a

$$(1,3) \quad \begin{cases} E_{(\mathbf{HT}_{\lambda_c})}(\zeta_o) U = E(\zeta_o) U = (U, W^{(o)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} U^{(o)}, & (U^{(o)}, W^{(o)}) = 1, \\ (\mathbf{HT}_{\lambda_c})^* W^{(o)} = -i \eta_o W^{(o)}, \end{cases}$$

avec des définitions analogues relatives à $\bar{\zeta}_o$.

VIII,2. FORMULATION COMPLÈTE DU PROBLÈME

VIII,2.1. Spectre de $\mathbf{HT}_{\lambda}$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$

Appliquons le Lemme 4 en $\zeta_o = i\eta_o$, valeur propre de multiplicité 1 de $\mathbf{HT}_{\lambda_c}$. On en déduit qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_o| < \delta$, $\exists$ une et une seule valeur propre $\zeta_1(\lambda)$ analytique en $(\lambda - \lambda_o)$, vérifiant $\zeta_1(\lambda_c) = \zeta_o$. De plus, on a

$$(2,1) \quad \begin{cases} E_{(\mathbf{HT}_{\lambda})}[\zeta_1(\lambda)] = E(\zeta_1) = E(\zeta_o) + (\lambda - \lambda_c) E_1(\lambda), \\ \dim \mathcal{E}[\zeta_1(\lambda); \mathbf{HT}_{\lambda}] = 1, \end{cases}$$

où $\lambda \rightarrow E_1(\lambda)$ est analytique de $\mathcal{V}(\lambda_c) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$. De plus, on peut prendre comme base du sous espace invariant $\mathcal{E}(\zeta_1, \mathbf{HT}_{\lambda})$, le vecteur $E(\zeta_1) U^{(o)}$:

$$(2,2) \quad \begin{cases} U_1(\lambda) = E(\zeta_1) U^{(o)} = U^{(o)} + (\lambda - \lambda_c) E_1(\lambda) U^{(o)}, \\ E(\zeta_1) U = (U, W_1(\lambda))_{H_2 \cap \mathcal{W}} U_1(\lambda), & (\mathbf{HT}_{\lambda})^* W_1 = \bar{\zeta}_1 W_1, \\ W_1(\lambda) = W^{(o)} + O(\lambda - \lambda_c). \end{cases}$$

D'autre part, d'après le Lemme 4, dans les mêmes conditions que pour $\zeta_1(\lambda)$, $\exists \bar{\zeta}_1(\lambda)$ valeur propre de $\mathbf{HT}_{\lambda}$, associée à $\bar{\zeta}_o$, et il lui correspond des formules analogues à (2,1) - (2,2). On peut alors, comme au chapitre VII, construire un contour Λ du type de Λ'_2 du § IV,6.4, dont la partie segmentaire a une abscisse $\xi < 0$ indépendante de $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$; ζ_1 et $\bar{\zeta}_1$ voisins de l'axe des imaginaires se trouvent à droite de Λ , tandis que le reste du spectre $\sigma(\mathbf{HT}_{\lambda})$ reste à gauche de Λ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$. On définit alors l'opérateur projection

$$(2,3) \quad P_{\lambda} = 1 - E(\zeta_1) - E(\bar{\zeta}_1)$$

et l'on a la décomposition suivante de $H_2 \cap \mathcal{W}$: $\forall U \in H_2 \cap \mathcal{W}$

$$(2,4) \quad \begin{cases} U = X + Y, \\ X = [E(\zeta_1) + E(\bar{\zeta}_1)] U = A U_1(\lambda) + \bar{A} \bar{U}_1(\lambda), \\ Y = P_{\lambda} U, \end{cases}$$

enfin on note

$$(2,5) \quad X^{(o)} = A U^{(o)} + \bar{A} \bar{U}^{(o)}, \quad A = (E(\zeta_1) U, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}},$$

c'est-à-dire que l'on passe de X à $X^{(o)}$ en remplaçant $U_1(\lambda)$ par $U^{(o)}$.

VIII,2.2. Décomposition de l'équation (V,3,1) - Première forme

Notons la décomposition (2,4) de $H_2 \cap \mathcal{W}$, sous la forme $\mathcal{E}(\zeta_1; \mathbf{HT}_{\lambda}) \oplus \mathcal{E}(\bar{\zeta}_1; \mathbf{HT}_{\lambda}) \oplus \mathcal{P}(\zeta_1; \mathbf{HT}_{\lambda})$ et appliquons celle-ci à l'équation générale (V,3,1). On obtient aisément à partir de (IV,6,12), (IV,6,14):

$$(2,6) \quad \begin{cases} A = A_0 e^{\zeta_1 t} - \int_0^t e^{\zeta_1(t-\tau)} (E(\zeta_1) H B[U(\tau), U(\tau)], W_1)_{H_2 \cap W} d\tau, \\ Y = \mathcal{I}(t; H T_\lambda) Y_0 + P_\lambda \mathfrak{B}(U, U, \lambda), \end{cases}$$

avec $A_0 = (U_0, W_1)_{H_2 \cap W}$, $Y_0 = P_\lambda U_0$. Remarquons que dans la première équation du système (2,6) on a utilisé le fait que $E(\zeta_1) \in \mathcal{L}(\dot{J}, H_2 \cap W)$. Nous notons dorénavant, comme au chapitre VII, $\tilde{\mathfrak{B}}(U, V; \lambda) = P_\lambda \mathfrak{B}(U, V; \lambda)$, et $\tilde{\mathfrak{B}}$ satisfait encore (VII, 2, 7) pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$.

Modifions la première équation du système (2,6), comme au chapitre VII. On a d'abord

$$E(\zeta_1) H B(U, U) = \zeta_1 E(\zeta_1) T_\lambda^{-1} B(U, U),$$

qui nous permet d'écrire la première équation de (2,6) sous la forme équivalente :

$$(2,7) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \zeta_1 [A - (T_\lambda^{-1} B(U, U), W_1(\lambda))_{H_2 \cap W}], \\ A(0) = A_0. \end{cases}$$

Ensuite, pour préciser le terme non linéaire du second membre de (2,7), nous sommes amené à faire l'hypothèse suivante, du même type que (VI, 4, 13) :

$$(2,8) \quad E(\zeta_0) H B(U^{(0)}, U^{(0)}) = 0.$$

Dans (2,8), $E(\zeta_0) \in \mathcal{L}(\dot{J})$, de plus si l'on utilise la commutativité du produit de $H T_{\lambda_c}$ et $E(\zeta_0)$, il vient :

$$(2,9) \quad \begin{cases} E(\zeta_0) T_{\lambda_c}^{-1} B(U^{(0)}, U^{(0)}) = 0, \\ E(\zeta_0) T_{\lambda_c}^{-1} B(\bar{U}^{(0)}, \bar{U}^{(0)}) = 0, \end{cases}$$

et cela va nous permettre de supprimer quelques termes dans le développement par rapport à $(\lambda - \lambda_c)$ du terme non linéaire. En fait, on pourrait supposer encore que les quantités définies par

$$(2,10) \quad \begin{cases} \alpha_1 = (T_{\lambda_c}^{-1} B^{(0)}(U^{(0)}, \bar{U}^{(0)}), W^{(0)})_{H_2 \cap W}, \\ \alpha_2 = (T_{\lambda_c}^{-1} B(\bar{U}^{(0)}, \bar{U}^{(0)}), W^{(0)})_{H_2 \cap W}, \end{cases}$$

sont nulles pour les mêmes raisons de périodicité; mais nous n'en aurons pas besoin, c'est pourquoi nous laissons α_1 et α_2 dans les équations. On peut alors écrire :

$$(2,11) \quad (T_\lambda^{-1} B(X+Y, X+Y), W_1(\lambda))_{H_2 \cap W} = \alpha_1 |A|^2 + \alpha_2 \bar{A}^2 + (T_{\lambda_c}^{-1} B^{(0)}(X^{(0)}, Y), W^{(0)})_{H_2 \cap W} - R_1(X^{(0)}, Y, \lambda),$$

où la fonction scalaire R_1 est développable en série de Taylor pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, sous la forme :

$$(2,12) \quad R_1(X^{(0)}, Y, \lambda) = R_{10}^{(0,2)}(Y, Y) + \sum_{\substack{n=1 \\ i+j=2}}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n R_{1n}^{(i,j)}(X^{(0)}, \dots, X^{(0)}, Y, \dots, Y),$$

où $(X^{(0)}, Y) \rightarrow R_{1n}^{(i,j)}(X^{(0)}, \dots, X^{(0)}, Y, \dots, Y)$ est homogène de degré i et continue par rapport à $X^{(0)}$ et homogène de degré j et continue par rapport à Y . Avec ces notations, le système (2,6) [en tenant compte de (2,7)] devient :

$$(2,13) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \zeta_1 \{ A - \alpha_1 |A|^2 - \alpha_2 \bar{A}^2 - (T_{\lambda_c}^{-1} B^{(0)}(X^{(0)}, Y), W^{(0)})_{H_2 \cap W} + R_1(X^{(0)}, Y, \lambda) \}, \\ A(0) = A_0 = (U_0, W_1)_{H_2 \cap W}, \\ Y(t) = \mathcal{I}(t; H T_\lambda) Y_0 + \tilde{\mathfrak{B}}(X, X; \lambda) + \tilde{\mathfrak{B}}^{(0)}(X, Y; \lambda) + \tilde{\mathfrak{B}}(Y, Y; \lambda). \end{cases}$$

Nous allons encore écrire la première équation du système (2,13) sous une autre forme en mettant en évidence l'évolution du module et de la phase de $A(t)$. Posons $A(t) = |A(t)| \cdot \exp [i\varphi(t)]$; on a successivement :

$$(2,14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A} \frac{dA}{dt} + A \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d|A|^2}{dt}, \\ \bar{A} \frac{dA}{dt} - A \frac{d\bar{A}}{dt} = 2i |A|^2 \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{dA}{dt} U_1 + \frac{d\bar{A}}{dt} \bar{U}_1, \\ \left| \frac{dA}{dt} \right| = \left\{ \left(\frac{d|A|^2}{dt} \right)^2 + |A|^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\}^{1/2}. \end{array} \right.$$

La première équation de (2,13) donne alors :

$$(2,15) \quad \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} = \operatorname{Re} \tau_1 |A|^2 + \eta_0 [\operatorname{Im}(\alpha_1 \bar{A} |A|^2) + \operatorname{Im}(\alpha_2 \bar{A}^3)] + \eta_0 \operatorname{Im}(\tau_{\lambda_c}^{-1} \mathbf{B}^{(e)}(X^{(e)}, Y), AW^{(e)})_{h_2 n w^+} + \tilde{R}(X^{(e)}, Y, \lambda),$$

$$(2,16) \quad |A|^2 \left[\frac{d\varphi}{dt} - \eta_0 \right] = \tilde{S}(X^{(e)}, Y, \lambda),$$

où les fonctions scalaires $\tilde{R}$ et $\tilde{S}$ sont développables en série de Taylor pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, sous la forme :

$$(2,17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{R}(X^{(e)}, Y, \lambda) = \tilde{R}_0^{(4,2)}(X^{(e)}, Y, Y) + \sum_{\substack{n=0 \\ i+j=3, i \geq 1}}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{R}_n^{(i,j)}(X^{(e)}, \dots, X^{(e)}, Y, \dots, Y), \\ \tilde{S}(X^{(e)}, Y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{S}_n |A|^2 + \sum_{\substack{n=0 \\ i+j=3, i \geq 1}}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{S}_n^{(i,j)}(X^{(e)}, \dots, X^{(e)}, Y, \dots, Y). \end{array} \right.$$

VIII,2.3. Décomposition de l'équation (V,3,1) - Forme finale

Pour résoudre le système (2,13) il va falloir manœuvrer de manière analogue à ce que nous avons fait au chapitre VII. Nous allons donc d'abord résoudre la deuxième équation de (2,13) en mettant en évidence la partie principale de $\mathcal{Y}(t)$, c'est-à-dire, encore, la partie principale de $\tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda)$. Procédons comme au § VII,2.3 et intégrons par partie cette dernière quantité :

$$(2,18) \quad \tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda) = \mathcal{P}_{\lambda} \tau_{\lambda}^{-1} \mathbf{B}[X(t), X(t)] - \mathcal{I}(t; \mathbf{H} \tau_{\lambda}) \mathcal{P}_{\lambda} \tau_{\lambda}^{-1} \mathbf{B}(X_0, X_0) + \mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda),$$

avec

$$\mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda) = - \int_0^t \mathcal{I}(t - \tau; \mathbf{H} \tau_{\lambda}) \mathcal{P}_{\lambda} \tau_{\lambda}^{-1} \mathbf{B}^{(e)}[X(\tau), \frac{dX(\tau)}{d\tau}] d\tau.$$

Mais, ici la partie intégrée ne correspond plus à la partie principale de $\tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda)$ puisque dans $\mathcal{R}_1$, $\frac{dX}{dt}$ est du même ordre que X à cause de $\frac{d\varphi}{dt}$. Il reste donc à extraire de $\mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda)$ sa partie principale, en remarquant que l'expression $\frac{dX}{dt} - i\eta_0(AU_1 - \bar{A}\bar{U}_1)$ est d'ordre supérieur à X . En effet, si l'on pose $\Psi(t) = \varphi(t) - \eta_0 t$, il vient successivement :

$$\frac{dX}{dt} - i\eta_0(AU_1 - \bar{A}\bar{U}_1) = \left[\frac{d|A|}{dt} + i \frac{d\Psi}{dt} |A| \right] e^{i\varphi} U_1 + \left[\frac{d|A|}{dt} - i \frac{d\Psi}{dt} |A| \right] e^{-i\varphi} \bar{U}_1,$$

$$\|X\| \left\| \frac{dX}{dt} - i\eta_0(AU_1 - \bar{A}\bar{U}_1) \right\| \leq \gamma \left[\frac{1}{2} \left| \frac{d|A|}{dt} \right|^2 + |A|^2 \left| \frac{d\Psi}{dt} \right|^2 \right],$$

$$(2,19) \quad \frac{dX}{dt} - i\eta_0 (AU^{(0)} - \bar{A}\bar{U}^{(0)}) = \mathcal{F}(X^{(0)}, Y; \lambda),$$

où la fonction $\lambda \rightarrow \mathcal{F}(X^{(0)}, Y; \lambda)$ est développable en série de Taylor pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, sous la forme :

$$\mathcal{F}(X^{(0)}, Y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \mathcal{F}_n(X^{(0)}) + \sum_{\substack{n=0 \\ i+j=2}}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \mathcal{F}_n^{(i,j)}(X^{(0)}, \dots, X^{(0)}, Y, \dots, Y),$$

où $\mathcal{F}_n \in \mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})$ et $\mathcal{F}_n^{(i,j)}$ est de même nature que $R_{1n}^{(i,j)}$. Ecrivons maintenant :

$$(2,20) \quad \mathcal{R}_1(X, \frac{dX}{dt}; \lambda) = \mathcal{R}_1[X, \mathcal{F}(X^{(0)}, Y; \lambda); \lambda] + \mathcal{R}_1[X, i\eta_0 (AU^{(0)} - \bar{A}\bar{U}^{(0)})]; \lambda],$$

et la partie principale doit provenir de l'expression $\mathcal{R}_1[X^{(0)}, i\eta_0 (AU^{(0)} - \bar{A}\bar{U}^{(0)})]; \lambda]$. Pour l'expliciter nous introduisons une nouvelle notation :

$$(2,21) \quad \mathcal{L}_t(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) = \int_t^{\infty} \mathcal{I}(\tau; HT_\lambda) P_\lambda T_\lambda^{-1} B(U^{(0)}, U^{(0)}) e^{2i\eta_0 \tau} d\tau,$$

et comme l'on sait que :

$$(2,22) \quad \mathcal{I}(t; HT_\lambda) P_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{\mathcal{G}}_n(t), \quad \text{converge pour } |\lambda - \lambda_c| < \delta$$

$$\text{et} \quad \|\tilde{\mathcal{G}}_n(t)\|_{\mathcal{L}(H_2 \cap \mathcal{W})} \leq \gamma \delta^{-n} e^{\tilde{\xi} t}, \quad \tilde{\xi} < 0,$$

d'après ce que nous avons vu au § IV, 7.2, il en résulte que $\lambda \rightarrow \mathcal{L}_t(U^{(0)}, \eta_0, \lambda)$ est une fonction analytique pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, à valeurs dans $C^1([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$, la dépendance par rapport à $U^{(0)}$ étant quadratique continue. Quand $t \rightarrow \infty$ $\mathcal{L}_t(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) \rightarrow 0$ exponentiellement tandis que quand $t=0$ la fonction vaut $\mathcal{L}_0(U^{(0)}, \eta_0, \lambda)$. Remarquons que l'identité

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_{t-\tau}(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) = \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) P_\lambda T_\lambda^{-1} B(U^{(0)}, U^{(0)}) e^{-2i\eta_0(t-\tau)}$$

entraîne

$$(2,23) \quad \int_0^t \mathcal{I}(t-\tau; HT_\lambda) P_\lambda T_\lambda^{-1} A^2(\tau) B(U^{(0)}, U^{(0)}) d\tau = e^{2i\eta_0 t} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_{t-\tau}(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) \cdot |A(\tau)|^2 e^{2i\psi(\tau)} d\tau \\ = A^2(t) \mathcal{L}_0(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) - A_0^2 e^{2i\eta_0 t} \mathcal{L}_t(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) - e^{2i\eta_0 t} \int_0^t \mathcal{L}_{t-\tau}(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) \frac{d}{d\tau} [|A(\tau)|^2 e^{2i\psi(\tau)}] d\tau.$$

Or, nous avons aussi

$$B^{(0)}[X^{(0)}, (AU^{(0)} - \bar{A}\bar{U}^{(0)})] = 2A^2 B(U^{(0)}, U^{(0)}) - 2\bar{A}^2 B(\bar{U}^{(0)}, \bar{U}^{(0)}),$$

$$\text{et} \quad \frac{d}{dt} [|A(t)|^2 e^{2i\psi(t)}] = 2e^{2i\psi(t)} \left[\frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} + i|A|^2 \frac{d\psi}{dt} \right];$$

où le terme du second membre s'exprime immédiatement, à l'aide de (2,15), (2,16), en fonction de $(X^{(0)}, Y, \lambda - \lambda_c)$ sous la forme

$$(2,24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} = [|A(t)|^2 e^{2i\psi(t)}] = e^{2i\psi(t)} \mathcal{H}_1(X^{(0)}, Y, \lambda), \\ \text{avec } \mathcal{H}_1(X^{(0)}, Y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \mathcal{H}_{1n}(X^{(0)}, X^{(0)}) + \sum_{\substack{n=0 \\ i+j=3, i \geq 1}}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \mathcal{H}_{1n}^{(i,j)}(X^{(0)}, \dots, X^{(0)}, Y, \dots, Y). \end{array} \right.$$

Il en résulte, qu'avec ces notations on peut écrire :

$$(2,25) \quad \mathcal{R}_1[X^{(0)}, i\eta_0 (AU^{(0)} - \bar{A}\bar{U}^{(0)})]; \lambda] = -2i\eta_0 [A^2(t) \mathcal{L}_0(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) - \bar{A}^2(t) \mathcal{L}_0(\bar{U}^{(0)}, -\eta_0, \lambda)] + \\ + 2i\eta_0 [A_0^2 e^{2i\eta_0 t} \mathcal{L}_t(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) - \bar{A}_0^2 e^{-2i\eta_0 t} \mathcal{L}_t(\bar{U}^{(0)}, -\eta_0, \lambda)] + \\ - 4\eta_0 \Im m e^{2i\eta_0 t} \int_0^t \mathcal{L}_{t-\tau}(U^{(0)}, \eta_0, \lambda) \mathcal{H}_1(X^{(0)}(\tau), Y(\tau), \lambda) e^{2i\psi(\tau)} d\tau,$$

et le terme intégral est, d'après (2,21), (2,22), (2,24), développable en série de Taylor par rapport à $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, à valeurs dans $C^2([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$. Nous pouvons réécrire alors la deuxième équation du système (2,13), en remplaçant $\tilde{\mathcal{B}}(X, X; \lambda)$ par l'expression déduite de (2,18), (2,20), (2,25). Pour cela introduisons encore quelques notations :

$$(2,26) \quad \Upsilon(U_o, \lambda, t) = \mathcal{I}(t; HT_\lambda) P_\lambda [Y_o - T_\lambda^{-1} B(X_o, X_o)] - 4\eta_o \Im m [A_o^2 e^{2i\eta_o t} \mathcal{L}_t(U^{(o)}; \eta_o, \lambda)] ,$$

$$(2,27) \quad \Lambda(X^{(o)}, X^{(o)}) = P_\lambda T_\lambda^{-1} B(X^{(o)}, X^{(o)}) + 4\eta_o \Im m [A^2 \mathcal{L}_o(U^{(o)}; \eta_o, \lambda_c)] ,$$

$$(2,28) \quad \tilde{\Lambda}(X^{(o)}, X^{(o)}; \lambda) = P_\lambda T_\lambda^{-1} B(X, X) + 4\eta_o \Im m [A^2 \mathcal{L}_o(U^{(o)}; \eta_o, \lambda)] - \Lambda(X^{(o)}, X^{(o)}) ,$$

$$(2,29) \quad \tilde{\mathfrak{H}}_2(X^{(o)}, Y; \lambda; \Psi) = \mathfrak{H}_1[X, \mathfrak{F}(X^{(o)}, Y; \lambda); \lambda] + \mathfrak{H}_1[X - X^{(o)}, i\eta_o (AU^{(o)} - \bar{A} \bar{U}^{(o)}); \lambda] - \\ - 4\eta_o \Im m e^{2i\eta_o t} \int_0^t \mathcal{L}_{t-\tau}(U^{(o)}; \eta_o, \lambda) \mathcal{H}_1[X^{(o)}(\tau), Y(\tau), \lambda] e^{2i\psi^{(o)}} d\tau .$$

On remarque immédiatement que les fonctions $\lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}(X^{(o)}, X^{(o)}; \lambda)$ et $\lambda \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}_2(X^{(o)}, Y; \lambda; \Psi)$ sont développables en série de Taylor pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, sous la forme* :

$$(2,30) \quad \begin{cases} \tilde{\Lambda}(X^{(o)}, X^{(o)}; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{\Lambda}_n(X^{(o)}, X^{(o)}) , \\ \tilde{\mathfrak{H}}_2(X^{(o)}, Y; \lambda; \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{\mathfrak{H}}_{2n}(X^{(o)}, X^{(o)}; \Psi) + \sum_{\substack{n=0 \\ i+j=3, i \geq 1}}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \mathfrak{H}_{2n}^{(i,j)}(X^{(o)}, \dots, X^{(o)}, Y, \dots, Y; \Psi) . \end{cases}$$

Enfin, revenons au système (2,13) qui devient finalement :

$$(2,31) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \mathcal{I}_1 \{ A - \alpha_1 |A|^2 - \alpha_2 \bar{A}^2 - (T_\lambda^{-1} B^{(o)}(X^{(o)}, Y), W^{(o)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} + R_1(X^{(o)}, Y, \lambda) \} , \\ A(0) = A_o = (U_o, W_1)_{H_2 \cap \mathcal{W}} , \\ Y(t) = \Upsilon(U_o, \lambda, t) + \Lambda(X^{(o)}, X^{(o)}) + \tilde{\Lambda}(X^{(o)}, X^{(o)}; \lambda) + \tilde{\mathfrak{H}}_2(X^{(o)}, Y; \lambda; \Psi) + \tilde{\mathcal{B}}(X, Y; \lambda) + \tilde{\mathcal{B}}(Y, Y; \lambda) , \end{cases}$$

et c'est ce système que nous allons résoudre.

VIII.3. RÉOLUTION DU SYSTÈME

VIII.3.1. Résolution de la deuxième équation en Y

Procédons comme au § VII,3, et considérons l'équation en Y du système (2,31). Elle est de la forme

$$(3,1) \quad Y - \tilde{\mathcal{I}}(\Upsilon, X^{(o)}, Y, \lambda; \Psi) = 0 ,$$

où $\tilde{\mathcal{I}}$ se déduit aisément de (2,31). Remarquons que si l'on fait $\Upsilon = X^{(o)} = 0$, alors la seule solution de (3,1) dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$ est $Y=0$; c'est-à-dire que l'on a en particulier

$$0 - \tilde{\mathcal{I}}(0, 0, 0, \lambda; \Psi) = 0 .$$

D'autre part la fonction $\tilde{\mathcal{I}}$ est développable en série de Taylor par rapport à la variable $(\Upsilon, X^{(o)}, Y, \lambda) \in \{C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})\}^3 \times \mathbb{C}$, à valeurs dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$. Enfin, l'on a

$$\tilde{\mathcal{I}}'_Y(0, 0, 0, \lambda_c; \Psi) = 0$$

dans $\mathcal{L}[C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})]$. Il en résulte que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites

* Ψ est considéré comme une variable indépendante dans $\tilde{\mathfrak{H}}_2$, n'intervenant que par $e^{2i\Psi}$ dans (2,29).

(comme pour le théorème 3), et il existe donc une solution unique $Y = \mathfrak{Y}(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi)$ de (3,1) pour $(r, X^{(e)}, \lambda)$ dans un certain voisinage de $(0, 0, \lambda_c)$. De plus, $\mathfrak{Y}$ est développable en série de Taylor dans ce voisinage et l'on peut écrire les premiers termes du développement :

$$(3,2) \quad \mathfrak{Y}(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi) = r + \Lambda(X^{(e)}, X^{(e)}) + \tilde{\mathfrak{B}}^{(e)}(X^{(e)}, r; \lambda_c) + \tilde{\mathfrak{B}}(r, r; \lambda_c) + \sum_{\substack{i+j+k \geq 3 \\ i+j+k \geq 2}} (\lambda - \lambda_c)^i \tilde{\mathfrak{Y}}_i^{(j,k)}(r, \dots, r; X^{(e)}, \dots, X^{(e)}; \Psi),$$

les notations étant évidentes, la convergence ayant lieu dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W})$, les différents termes étant fonctions continues et bornées de Ψ .

VIII,3.2. Résolution du système (2,31) sur $[0, T]$

Remplaçons dans la première équation du système (2,31) Y par $\mathfrak{Y}(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi)$ et remarquons que les résultats du paragraphe précédent sont vrais a fortiori dans $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W}) \quad \forall T > 0$. Introduisons quelques notations afin de simplifier l'écriture des équations :

$$(3,3) \quad \begin{cases} \mathfrak{Y}(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi) = r + \Lambda(X^{(e)}, X^{(e)}) + \mathfrak{R}_3(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi), \\ h(r) = -(\tau_{\lambda_c}^{-1} B^{(e)}[U^{(e)}, r], W^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \\ \tilde{h}(r) = -(\tau_{\lambda_c}^{-1} B^{(e)}[\bar{U}^{(e)}, r], W^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \\ f(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi) = -(\tau_{\lambda_c}^{-1} B^{(e)}[X^{(e)}, \mathfrak{R}_3(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi)], W^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} + R_4[X^{(e)}, \mathfrak{Y}(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi), \lambda]; \end{cases}$$

et l'on remarque que la fonction $(r, A, \bar{A}, \lambda) \rightarrow f(r, AU^{(e)} + \bar{A}\bar{U}^{(e)}, \lambda; \Psi)$ de $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W}) \times \{C^0([0, \infty[; \mathbb{C})\}^2 \times \mathbb{R}$ dans $C^0([0, \infty[; \mathbb{C})$ est développable en série de Taylor dans un voisinage de $(0, 0, 0, \lambda_c)$. L'équation différentielle en A du système (2,31) devient :

$$(3,4) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \zeta_1 \{ A + A h(r) + \bar{A} \tilde{h}(r) - \alpha_1 |A|^2 - \alpha_2 \bar{A}^2 - (\tau_{\lambda_c}^{-1} B^{(e)}[X^{(e)}, \Lambda(X^{(e)}, X^{(e)})], W^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} + f(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi) \}, \\ A(0) = A_0 = (U_0, W_0)_{H_2 \cap \mathcal{W}}. \end{cases}$$

De même les équations (2,15) et (2,16) deviennent :

$$(3,5) \quad \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} = \operatorname{Re} \zeta_1 |A|^2 + \eta_0 \operatorname{Im} [\alpha_1 \bar{A} |A|^2 + \alpha_2 \bar{A}^3] - \eta_0 \operatorname{Im} [|A|^2 h(r) + \bar{A}^2 \tilde{h}(r)] + \\ + \eta_0 \operatorname{Im} (\tau_{\lambda_c}^{-1} B^{(e)}[X^{(e)}, \Lambda(X^{(e)}, X^{(e)})], A W^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} + \tilde{R}_1(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi),$$

$$(3,6) \quad |A|^2 \frac{d\Psi}{dt} = \tilde{S}_1(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi),$$

où les fonctions scalaires $\tilde{R}_1$ et $\tilde{S}_1$ sont développables en série de Taylor pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, $(r, X^{(e)})$ étant tel que le développement (3,2) converge. On a, à partir de (2,17) :

$$(3,7) \quad \begin{cases} \tilde{R}_1(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi) = \tilde{R}_0^{(i,j)}(X^{(e)}, r, r) + \sum_{\substack{i+j+n \geq 4, (i,j,n) \neq (4,0,0) \\ i+j \geq 3, i \geq 1}} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{R}_{i+n}^{(i,j)}(X^{(e)}, \dots, X^{(e)}, r, \dots, r; \Psi), \\ \tilde{S}_1(r, X^{(e)}, \lambda; \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{S}_n |A|^2 + \sum_{\substack{i+j+n \geq 3 \\ i+j \geq 3, i \geq 1}} (\lambda - \lambda_c)^n \tilde{S}_{i+n}^{(i,j)}(X^{(e)}, \dots, X^{(e)}, r, \dots, r; \Psi). \end{cases}$$

Plaçons nous dans la boule de centre 0 , dans $C^0([0, T]; \mathbb{C})$, définie par $B_1 = \{A; \sup_{t \in [0, T]} |A(t)| \leq \varepsilon_1 < 1\}$ et supposons que U_0 ait été choisi tel que, pour $|\lambda - \lambda_c| \leq \delta_0$, on ait

$$(3,8) \quad |\mathcal{H}[\mathcal{V}(U_0, \lambda, t)]| + |\tilde{\mathcal{H}}[\mathcal{V}(U_0, \lambda, t)]| \leq \varepsilon_1^2 e^{\xi t}.$$

Il est évidemment toujours possible de choisir ε_1 , δ_0 , U_0 tels que la série (3,2) converge dans $C^\circ([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$. Alors, pour $|\lambda - \lambda_c| \leq \delta_0$, on a les inégalités :

$$(3,9) \quad \left| \frac{d|A|}{dt} - \operatorname{Re} \zeta_1 |A| \right| \leq \gamma \varepsilon_1^2 \quad (\text{utilisation de (3,5)}),$$

$$(3,10) \quad |f(\mathcal{V}, X^{(0)}, \lambda; \psi)| \leq \gamma [\varepsilon_1^4 + (\lambda - \lambda_c) \varepsilon_1^2],$$

pour une certaine constante γ indépendante de ε_1 et $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$. Choisissons alors A_0 tel que $|A_0| \leq k \varepsilon_1$ avec $k < 1$; on peut procéder comme au § VII,3.2 et appliquer le théorème de [9] page 38 puisque le second membre de (3,4) en satisfait les prémisses dans B_1 . On obtient donc une solution unique $A(t)$ sur $[0, T_1]$ avec $T_1 = (1-k) \gamma_1 (|\zeta_1| + \varepsilon_1^2)$. Ce résultat est bien faible en regard du théorème 3 qui nous garantit une solution sur $[0, T]$ avec T de l'ordre de ε_1^{-1} . En fait, on peut utiliser (3,9) pour voir que :

$$|A(t)| \leq |A_0| e^{\operatorname{Re} \zeta_1 t} + \gamma \varepsilon_1^2 (\operatorname{Re} \zeta_1)^{-1} (e^{\operatorname{Re} \zeta_1 t} - 1),$$

d'où il vient que si l'on suppose $\operatorname{Re} \zeta_1 = o(\varepsilon_1)$, alors $\exists T$ de l'ordre de ε_1^{-1} tel que

$$k \varepsilon_1 e^{\operatorname{Re} \zeta_1 T} + \gamma \varepsilon_1^2 (\operatorname{Re} \zeta_1)^{-1} (e^{\operatorname{Re} \zeta_1 T} - 1) = k_1 \varepsilon_1 < \varepsilon_1.$$

Il en résulte, d'après le Corollaire de [9] page 38, que la solution $A(t)$ peut être prolongée sur $[0, T]$ et que $|A(t)| \leq k_1 \varepsilon_1$ pour $t \in [0, T]$.

VIII,3.3. Résolution du système (2,31) sur $[0, \infty[$

Maintenant, pour prolonger la solution sur $[0, \infty[$, nous sommes amené à faire une hypothèse, analogue à celle que l'on fait dans le cas de l'échange des stabilités [(VI,4,14)], mais relativement plus complexe à cause de la présence de la quantité $\mathcal{L}_0(U^{(0)}, \eta_0, \lambda_c)$ dans $\Lambda(U^{(0)}, U^{(0)})$. Posons tout d'abord

$$(3,11) \quad \begin{aligned} \alpha &= -\eta_0 \operatorname{Im} \left\{ T_{\lambda_c}^{-1} \{ \mathcal{B}^{(0)}[U^{(0)}, \Lambda^{(0)}(U^{(0)}, \bar{U}^{(0)})] + \mathcal{B}^{(0)}[\bar{U}^{(0)}, \Lambda(U^{(0)}, U^{(0)})] \}, W^{(0)} \right\}_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \\ \beta_1 &= i\eta_0 \left\{ (T_{\lambda_c}^{-1} \mathcal{B}^{(0)}[U^{(0)}, \Lambda^{(0)}(U^{(0)}, \bar{U}^{(0)})], \bar{W}^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} + (T_{\lambda_c}^{-1} \mathcal{B}^{(0)}[\bar{U}^{(0)}, \Lambda(U^{(0)}, U^{(0)})], \bar{W}^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} - \right. \\ &\quad \left. - (T_{\lambda_c}^{-1} \mathcal{B}^{(0)}[U^{(0)}, \Lambda(U^{(0)}, U^{(0)})], W^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} \right\}, \\ \beta_2 &= i\eta_0 (T_{\lambda_c}^{-1} \mathcal{B}^{(0)}[U^{(0)}, \Lambda(U^{(0)}, U^{(0)})], \bar{W}^{(0)})_{H_2 \cap \mathcal{W}}, \end{aligned}$$

avec

$$(3,12) \quad \begin{cases} \Lambda(U^{(0)}, U^{(0)}) = R_{\lambda_c} T_{\lambda_c}^{-1} \mathcal{B}(U^{(0)}, U^{(0)}) - 2i\eta_0 \mathcal{L}_0(U^{(0)}, \eta_0, \lambda_c), \\ \Lambda^{(0)}(U^{(0)}, \bar{U}^{(0)}) = R_{\lambda_c} T_{\lambda_c}^{-1} \mathcal{B}^{(0)}(U^{(0)}, \bar{U}^{(0)}). \end{cases}$$

De plus, posons $\operatorname{Re} \zeta_1 = \xi > 0$; alors (3,5) s'écrit :

$$(3,13) \quad \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} = \xi |A|^2 + \eta_0 \operatorname{Im} \{ |A|^2 [\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{V}) e^{2i\varphi} - \mathcal{H}(\mathcal{V})] \} - \eta_0 \operatorname{Im} (\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi}) |A|^3 - \alpha |A|^4 + \\ + \operatorname{Re} (\beta_1 e^{2i\varphi} + \beta_2 e^{4i\varphi}) |A|^4 + \tilde{R}_1(\mathcal{V}, X^{(0)}, \lambda; \psi).$$

C'est alors qu'on peut « se douter » que les termes $\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}$ qui tendent exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, et que les termes oscillants (où $e^{in\varphi}$, $n \neq 0$, est en facteur) auront une « influence décroissante » quand t croîtra. C'est pourquoi il semble naturel de se poser la question de savoir quel est le signe de α ,

puisqu'il correspond au premier terme dont l'influence va compter. En fait, d'après son expression (3,11), α a un signe indépendant du choix de $U^{(0)}$, car par construction si l'on change $U^{(0)}$ en $-U^{(0)}$, $\bar{U}^{(0)}$ est changé en $-\bar{U}^{(0)}$ et $W^{(0)}$ est changé en $-W^{(0)}$, tandis que $\mathcal{L}_0(U^{(0)}, \eta_0, \lambda_c)$ et $\Lambda(U^{(0)}, U^{(0)})$ sont inchangés. L'hypothèse que nous faisons consiste à supposer $\alpha > 0$. En effet, considérons l'équation déduite de (3,13) en supprimant les termes « petits » et « oscillants »

$$(3,14) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d|A_1|^2}{dt} = \xi |A_1|^2 - \alpha |A_1|^4, \\ |A_1(0)| = |A_0|. \end{cases}$$

La solution de (3,14) s'écrit, $\forall t \in [0, \infty[$,

$$\frac{1}{|A_1(t)|^2} = \frac{1}{|A_0|^2} e^{-2\xi t} + \frac{\alpha}{\xi} (1 - e^{-2\xi t}),$$

et nous remarquons que quand $t \rightarrow \infty$, $|A_1(t)| \rightarrow \alpha^{-1/2} \xi^{1/2}$ qui est d'ordre $(\lambda - \lambda_c)^{1/2}$.

Cette information nous pousse à choisir $\varepsilon_1 = \tilde{\gamma} (\lambda - \lambda_c)^{1/2}$ (comme au chapitre VII), nous réservant de préciser $\tilde{\gamma}$ plus tard. Les conditions à imposer à la condition initiale U_0 , pour que (3,8) soit vérifié s'en déduisent immédiatement. Nous allons montrer que $|A(t)|$ reste borné par $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ indépendamment de T , pour λ fixé dans $\mathcal{V}(\lambda_c)$ bien choisi. Nous savons déjà d'après le § VIII, 3.2 que $A(t)$ existe sur $[0, T]$, est borné par $k_1 \varepsilon_1 < \varepsilon_1$, et que T est d'ordre $(\lambda - \lambda_c)^{-1/2}$. Opérons alors le changement de fonction

$z(t) = |A(t)|^2$ et notons que l'on peut écrire $\tilde{R}_1(\gamma, X^{(0)}, \lambda; \psi) = |A| g(|A|, \varphi, \gamma, \lambda)$; l'équation (3,13) devient :

$$(3,15) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{dz}{dt} + \xi z - \alpha = -\eta_0 z \operatorname{Im} [\tilde{h}(\gamma) e^{2i\varphi} - h(\gamma)] + \eta_0 z^{1/2} \operatorname{Im} (\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi}) - \\ \quad - \operatorname{Re} (\beta_1 e^{2i\varphi} + \beta_2 e^{4i\varphi}) - z^{3/2} g(|A|, \varphi, \gamma, \lambda), \\ z(0) = z_0 = |A_0|^2. \end{cases}$$

Cette équation est elle-même équivalente à l'équation intégrale :

$$(3,16) \quad z(t) - z_0 e^{-2\xi t} - \frac{\alpha}{\xi} (1 - e^{-2\xi t}) = -2\eta_0 \int_0^t z(\tau) \operatorname{Im} \{ \tilde{h}[\gamma(\tau)] e^{2i\varphi(\tau)} - h[\gamma(\tau)] \} e^{2\xi(\tau-t)} d\tau + \\ + 2\eta_0 \int_0^t [z(\tau)]^{1/2} \operatorname{Im} [\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi(\tau)} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi(\tau)}] e^{2\xi(\tau-t)} d\tau - 2 \operatorname{Re} \int_0^t [\beta_1 e^{2i\varphi(\tau)} + \beta_2 e^{4i\varphi(\tau)}] e^{2\xi(\tau-t)} d\tau - 2 \int_0^t z^{3/2}(\tau) g[|A(\tau)|, \varphi(\tau), \gamma(\tau), \lambda] e^{2\xi(\tau-t)} d\tau.$$

Nous allons nous efforcer d'estimer les différents termes de (3,16). Pour cela nous utilisons la notation

$$\sup_{t \in [0, T]} |z(t)| = |z|$$

et les estimations :

$$(3,17) \quad \begin{cases} |\operatorname{Im} \{ \tilde{h}[\gamma(t)] e^{2i\varphi(t)} - h[\gamma(t)] \}| \leq \varepsilon_1^2 e^{\tilde{\xi} t}, \quad \tilde{\xi} < 0 \text{ et } \tilde{\xi} = O(1), \\ \left| \frac{d\psi}{dt}(t) \right| \leq \gamma_1 z^{1/2}(t) [(\lambda - \lambda_c) \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2], \end{cases}$$

déduites de (3,8) et de (3,6).

Il en résulte, pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$ et $t \in [0, T]$:

$$(3,18) \quad \left| 2\eta_0 \int_0^t z(\tau) \operatorname{Im} \{ \tilde{h}[\gamma(\tau)] e^{2i\varphi(\tau)} - h[\gamma(\tau)] \} e^{2\xi(\tau-t)} d\tau \right| \leq \gamma_2 \varepsilon_1^2 |z| e^{-2\xi t},$$

$$(3,19) \quad \left| 2 \int_0^t z^{3/2}(\tau) g[|A(\tau)|, \varphi(\tau), \gamma(\tau), \lambda] e^{2\xi(\tau-t)} d\tau \right| \leq \gamma_3 [\varepsilon_1^4 + (\lambda - \lambda_c) \varepsilon_1^2] \xi^{-1} |z|^{3/2},$$

puisque d'une part $\tilde{\xi} + 2\xi < 0$ est d'ordre $O(1)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, et que d'autre part g s'estime à partir de (3,7). On a encore

$$2 \operatorname{Re} \int_0^t [\beta_1 e^{2i\varphi(\tau)} + \beta_2 e^{4i\varphi(\tau)}] e^{2\xi(\tau-t)} d\tau = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta_1}{\xi + i\eta_0} [e^{2i\varphi(\tau)} - e^{2i\varphi_0 - 2\xi t}] + \frac{\beta_2}{\xi + 2i\eta_0} [e^{4i\varphi(\tau)} - e^{4i\varphi_0 - 2\xi t}] \right\} -$$

$$- 2 \operatorname{Re} \int_0^t e^{\frac{t}{2}\xi(\tau-t)} \frac{d\Psi}{d\tau} \left\{ \frac{i\beta_1}{\xi + i\eta_0} e^{2i\varphi(\tau)} + \frac{2i\beta_2}{\xi + 2i\eta_0} e^{4i\varphi(\tau)} \right\} d\tau ;$$

le terme tout intégré étant d'ordre $O(1)$ et grâce à (3,17) on arrive à :

$$(3,20) \quad \left| 2 \operatorname{Re} \int_0^t [\beta_1 e^{2i\varphi(\tau)} + \beta_2 e^{4i\varphi(\tau)}] e^{2\xi(\tau-t)} d\tau \right| \leq \gamma_4 \left\{ 1 + \xi^{-1} [\xi_1^2 + (\lambda - \lambda_c) \xi_1] |\gamma^{1/2}| \right\}.$$

Il reste encore à estimer l'intégrale contenant $[\gamma(\tau)]^{1/2}$ dans (3,16). Pour cela nous allons utiliser les identités :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \gamma^{1/2}(t) e^{i\psi(t)} \right\} = - [\gamma(t)]^{3/2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} - i|A|^2 \frac{d\Psi}{dt} \right\} e^{i\psi(t)},$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \gamma^{1/2}(t) e^{3i\psi(t)} \right\} = - [\gamma(t)]^{3/2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} - 3i|A|^2 \frac{d\Psi}{dt} \right\} e^{3i\psi(t)},$$

et les estimations :

$$(3,21) \quad \begin{cases} \left| \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} - i|A|^2 \frac{d\Psi}{dt} - i\eta_0 (\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi}) |A|^3 \right| \leq \gamma_5 [\xi_1^2 + (\lambda - \lambda_c)] [|A|^2 + \xi_1^2 |A|], \\ \left| \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} - 3i|A|^2 \frac{d\Psi}{dt} - i\eta_0 [\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi} + 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi})] |A|^3 \right| \leq \gamma_5 [\xi_1^2 + (\lambda - \lambda_c)] [|A|^2 + \xi_1^2 |A|]. \end{cases}$$

En effet, après intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^t \gamma^{1/2}(\tau) e^{i\varphi(\tau)} e^{2\xi(\tau-t)} d\tau = \frac{1}{2\xi + i\eta_0} \left\{ \gamma^{1/2}(t) e^{i\varphi(t)} - \gamma_0^{1/2} e^{i\varphi_0 - 2\xi t} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\xi + i\eta_0} \int_0^t \gamma^{3/2}(\tau) \left\{ \frac{1}{2} \frac{d|A|^2}{dt} - i|A|^2 \frac{d\Psi}{dt} \right\} e^{i\varphi(\tau) + 2\xi(\tau-t)} d\tau.$$

Or, si l'on considère l'intégrale :

$$\Im \left\{ \frac{2\eta_0 \bar{\alpha}_1}{2\xi + i\eta_0} \int_0^t i\eta_0 (\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi(\tau)} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi(\tau)}) e^{i\varphi(\tau) + 2\xi(\tau-t)} d\tau \right\},$$

on retrouve les mêmes calculs que pour arriver à (3,20). Il en résulte l'estimation (en utilisant (3,21)) :

$$(3,22) \quad \left| 2\eta_0 \int_0^t \gamma^{1/2}(\tau) \Im(\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi(\tau)}) e^{2\xi(\tau-t)} d\tau \right| \leq \gamma_6 \left\{ 1 + \gamma_0^{1/2} + |\gamma^{1/2}| + \xi^{-1} [\xi_1^2 + (\lambda - \lambda_c)] |\gamma^{1/2}| + \xi^{-1} [\xi_1^4 + (\lambda - \lambda_c) \xi_1^2] |\gamma| \right\}.$$

Si l'on fait de même avec le terme

$$2\eta_0 \int_0^t \gamma^{1/2}(\tau) \Im(\bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi(\tau)}) e^{2\xi(\tau-t)} d\tau,$$

il apparaît une intégrale de la forme :

$$\Im \left\{ \frac{2\eta_0 \bar{\alpha}_2}{2\xi + 3i\eta_0} \int_0^t i\eta_0 [\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi(\tau)} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi(\tau)} + 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi(\tau)} + \bar{\alpha}_2 e^{3i\varphi(\tau)})] e^{3i\varphi(\tau) + 2\xi(\tau-t)} d\tau \right\},$$

dont tous les termes se traitent comme dans le cas précédent, sauf celui qui est de la forme :

$$(3,23) \quad \Im \left\{ \frac{2\eta_0 \bar{\alpha}_2}{2\xi + 3i\eta_0} \int_0^t i\eta_0 \alpha_2 e^{2\xi(\tau-t)} d\tau \right\} = \frac{\eta_0^2 |\alpha_2|^2 (1 - e^{-2\xi t})}{\xi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\xi + 3i\eta_0} \right) = \frac{2\eta_0^2 |\alpha_2|^2 (1 - e^{-2\xi t})}{4\xi^2 + 9\eta_0^2}.$$

En revenant alors à (3,16) et regroupant les résultats, on obtient l'estimation : $\forall t \in [0, T]$,

$$(3,24) \left| z(t) - z_0 e^{-2\tilde{\varepsilon}t} - \frac{\alpha}{\tilde{\varepsilon}} (1 - e^{-2\tilde{\varepsilon}t}) \right| \leq \gamma \left\{ 1 + z_0^{1/2} + |z_0^{1/2}| [1 + \tilde{\varepsilon}^{-1} [\varepsilon_1^2 + (\lambda - \lambda_c)]] + \tilde{\varepsilon}^{-1} \varepsilon_1^2 [\varepsilon_1^2 + (\lambda - \lambda_c)] (|z| + |z_0^{3/2}|) \right\},$$

pour une certaine constante γ indépendante de t , de $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, et de ε_1 suffisamment petit. Il faut bien voir que les normes du second membre de (3,24) sont en fait des $\sup_{t \in [0, t_1]} |f(t)|$. Pour utiliser cette estimation

utilisons le fait que l'on a choisi $\varepsilon_1 = \tilde{\gamma} (\lambda - \lambda_c)^{1/2}$ et supposons que $\tilde{\varepsilon}$ soit strictement $O(\lambda - \lambda_c)$ pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$; de plus supposons qu'il existe une constante K_1 telle que $z_0 < K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$ et $\alpha \tilde{\varepsilon}^{-1} < 1/2$. $K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$, alors, de manière évidente $\exists t_1, 0 < t_1 \leq T$ tel que $\forall t \in [0, t_1] \quad z(t) \leq 2 K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$. De (3,24) on tire : $\forall t \in [0, t_1]$

$$(3,25) \quad |z(t) - z_0 e^{-2\tilde{\varepsilon}t} - \alpha \tilde{\varepsilon}^{-1} (1 - e^{-2\tilde{\varepsilon}t})| \leq \gamma K_1^{1/2} (1 + \tilde{\gamma}^2) (1 + K_1 \tilde{\gamma}^2) (\lambda - \lambda_c)^{-1/2},$$

pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$. Or, avec nos hypothèses

$$z_0 e^{-2\tilde{\varepsilon}t} + \alpha \tilde{\varepsilon}^{-1} (1 - e^{-2\tilde{\varepsilon}t}) \leq K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1} (1/2 + 1/2 e^{-2\tilde{\varepsilon}t}),$$

d'où, pour $\mathcal{V}(\lambda_c)$ bien choisi, $z(t_1) < K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$ découle de (3,25) [$\mathcal{V}(\lambda_c)$ dépend du choix de K_1 et de $\tilde{\gamma}$]. On peut alors itérer le raisonnement en partant de la nouvelle origine t_1 , et ainsi de suite. Il en résulte que l'on peut recouvrir $[0, T]$ par ce procédé, c'est-à-dire que $z(t)$ reste borné par $K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$ pour $t \in [0, T]$. Considérons alors la fonction $t \rightarrow A^{-2}(t)$ solution d'une équation différentielle qu'on pourrait déduire de (3,15) et de (3,6). Nous venons de voir que moyennant certaines conditions initiales, si l'on raisonne dans la boule de rayon $2 K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$, alors la solution reste bornée par $K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer le corollaire de [9] page 38, et il existe une solution unique $A^{-2}(t)$ sur $[0, \infty[$ bornée par $K_1 (\lambda - \lambda_c)^{-1}$ telle que $A(t)$ soit borné par $\tilde{\gamma} (\lambda - \lambda_c)^{1/2}$ [pour cela il suffit de choisir $\tilde{\gamma} > [\tilde{\varepsilon} \alpha^{-1} (\lambda - \lambda_c)^{-1}]^{1/2}$ et d'utiliser (3,25)]. De plus, on montre aisément par l'intermédiaire de (3,25), qu'avec notre choix de z_0 , pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, $|A(t)|$ reste équivalent à $|A_1(t)|$ solution de l'équation approchée (3,14). Remarquons enfin que dans notre raisonnement nous ajustons $\mathcal{V}(\lambda_c)$, K_1 étant fixé, et cela nous impose une restriction sur la condition initiale :

$$K_1^{-1} (\lambda - \lambda_c) < |A_0|^2 \leq K^2 \tilde{\gamma}^2 (\lambda - \lambda_c).$$

Mais, si $|A_0|^2 \leq K_1^{-1} (\lambda - \lambda_c)$ ($\mathcal{V}(\lambda_c)$ ayant été déterminé à l'aide de K_1 grâce à notre raisonnement) alors deux éventualités peuvent se produire : (i) où $|A(t)|^2$ dépasse $K_1^{-1} (\lambda - \lambda_c)$ pour un certain t_0 et on peut commencer le raisonnement précédent à partir de t_0 (nouvelle origine), le raisonnement sur $[0, t_0]$ étant assuré par le § VIII,3.2; (ii) où $|A(t)|^2$ ne dépasse pas $K_1^{-1} (\lambda - \lambda_c) \quad \forall t \in [0, \infty[$ et il en résulte que le raisonnement du § VIII,3.2 suffit ici, mais on ne peut rien dire sur le comportement asymptotique quand $t \rightarrow \infty$ de $A(t)$, c'est-à-dire qu'il est d'ordre $O[(\lambda - \lambda_c)^{1/2}] \quad \forall t \in [0, \infty[$. En fait, c'est la présence des termes « oscillants » en $|A|^3$ dans (3,13), qui nous interdit d'affirmer qu'au bout d'un certain temps T , $A(t)$ est d'ordre $(\lambda - \lambda_c)^{1/2}$. Par contre, si nous faisons l'hypothèse supplémentaire $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, le raisonnement du chapitre VII marche et pour $t > T$ suffisamment grand on sait que $|A(t)|$ se comporte asymptotiquement comme $|A_1(t)|^2$.

Enfin, en ce qui concerne la phase $\varphi(t)$ de $A(t)$, dans le cas où $|A(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \tilde{\varepsilon}^{1/2} \alpha^{-1/2} + O(\lambda - \lambda_c)$, l'équation (3,6) montre que $\frac{d\varphi}{dt} = \eta_0 + O[(\lambda - \lambda_c)^{1/2}] (O(\lambda - \lambda_c) \text{ si } \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$.

On peut alors énoncer, en modifiant légèrement les notations :

Théorème 11 - Existence d'une solution bornée sur $[0, \infty[$ dans le cas sur-critique de non-échange des stabilités

Dans le cadre de non-échange des stabilités, si les hypothèses (1,1), (1,2), (2,8), $\Re \omega_e [\zeta_1(\lambda)]$ strictement $O(\lambda - \lambda_c)$ [$\Re \omega_e \zeta_1$ étant la partie réelle de la valeur propre la plus à droite de $\mathbf{HT}_\lambda$, dont on sait déjà qu'elle est $O(\lambda - \lambda_c)$], et $\alpha > 0$ [α défini par (3,11)], sont vérifiées, alors $\exists \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $\varepsilon_2 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$, et un voisinage à droite de λ_c , $\mathcal{V}^+(\lambda_c)$, dépendant de ε_0 et ε_2 , tels que si $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_c)$ et que U_0 vérifie :

$$(3,26) \quad \begin{cases} |(U_0, W^{(0)})_{H_2 \cap W}| \leq \varepsilon_0 (\lambda - \lambda_c)^{1/2}, \\ \|P_{\lambda_c} U_0\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_0 (\lambda - \lambda_c), \end{cases}$$

alors il existe une solution unique, $U = A U_1(\lambda) + \bar{A} \bar{U}_1(\lambda) + Y$, du système (2,6) dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap W)$. De plus, elle vérifie $\forall t \geq 0$:

$$(3,27) \quad \begin{cases} |(U(t), W^{(0)})_{H_2 \cap W}| \leq \varepsilon_1 (\lambda - \lambda_c)^{1/2}, \\ \|P_{\lambda_c} U(t)\|_{H_2 \cap W} \leq \varepsilon_1 (\lambda - \lambda_c). \end{cases}$$

Enfin, si pour un certain $\tau > 0$ [τ existant sûrement dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (défini par (2,10))], on a

$$(3,28) \quad |(U(\tau), W^{(0)})_{H_2 \cap W}| > \varepsilon_2 (\lambda - \lambda_c)^{1/2},$$

alors quand $t \rightarrow \infty$ on peut écrire

$$(3,29) \quad |(U(t), W^{(0)})_{H_2 \cap W}| = \alpha^{-1/2} (\operatorname{Re} \tau_1)^{1/2} + O(\lambda - \lambda_c),$$

et la phase $\varphi(t)$ de $(U(t), W^{(0)})_{H_2 \cap W}$ a une dérivée par rapport à t dont la partie principale est $\eta_0 = \operatorname{Im} \tau_0$ [défini par (1,1)] .

En fait, (3,26) se déduit aisément de la définition (2,26) de $Y(U_0, \lambda, t)$, de la condition (3,8), et, de l'ordre de grandeur de ε_1 ; d'autre part on remarque que pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_c)$, on a $A(t) \sim (U(t), W^{(0)})_{H_2 \cap W}$ à cause de (2,2).

VIII,3.4. Remarques

VIII,3.4.1. On peut parler finalement d'un écoulement limite dans le cas où (3,29) est valable quand $t \rightarrow \infty$. Il est représenté asymptotiquement par l'équation :

$$(3,30) \quad U(t) = \alpha^{-1/2} (\operatorname{Re} \tau_1)^{1/2} [U^{(0)} e^{i(\eta_0 t + \varphi_0)} + \bar{U}^{(0)} e^{-i(\eta_0 t + \varphi_0)}],$$

Cette représentation n'étant valable que pour un intervalle fini de t , à cause de la phase d'où φ_0 doit être réajusté au fur et à mesure que t croît. C'est au sens de (3,30) que l'on dit que l'écoulement «tend vers un écoulement périodique dans le temps, d'amplitude constante».

VIII,3.4.2. On peut, ici encore, faire le raisonnement du § VII,4.2, c'est-à-dire voir qu'en extrayant de manière itérative [idem que pour $\mathcal{B}(X, X; \lambda)$] la partie principale de tous les termes du développement (3,2) de $\mathcal{Y}(Y, X^{(0)}; \lambda; \Psi)$, on obtient formellement un développement en série de puissances de $A(t)$ et $\bar{A}(t)$, où ceux-ci ne sont plus à intégrer, et une somme de termes dépendant de U_0 , tendant exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Si l'on identifie ces termes à 0 et qu'on remplace Y , par le développement ainsi obtenu, dans la première équation de (2,31), on obtient une équation différentielle avec un second membre sous forme de développement en puissances de $A(t)$ et $\bar{A}(t)$.

En fait, certains auteurs ([47], [53], [16]) ont posé a priori des développements en série de puissances de $A(t)$ et $\bar{A}(t)$, de telle manière que dans l'expression de dA/dt n'apparaisse pas de «terme oscillant», puis ils ont tronqué le développement de cette expression après les termes en $|A|^3$, tout cela sans justification rigoureuse. Notre travail permet de rendre licite ces études puisque nous avons montré que les «termes oscillants» sont d'influence négligeable dès que t est assez grand, et que si α est positif, seul le terme correspondant a de l'importance.

IX. APPLICATION - PROBLÈME DE BÉNARD

IX.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Nous appelons « problème de Bénard », l'étude de l'origine de la convection d'un fluide sis entre deux plaques planes horizontales, celle du dessous étant à plus haute température que celle du dessus. Attachons nous à l'étude théorique de ce phénomène en mettant de côté l'aspect expérimental.

Ce problème a été très souvent étudié, surtout depuis une dizaine d'années. La théorie classique, linéaire, est résumée dans le livre de **S. Chandrasekhar** [10]; puis, en ce qui concerne l'étude du problème non linéaire, on peut distinguer plusieurs traitements fondamentalement différents :

1°) pour la théorie stationnaire, c'est-à-dire l'étude de l'apparition de nouvelles solutions correspondant à la convection quand le nombre de Rayleigh dépasse une certaine valeur critique, citons en particulier les travaux de **M.R. Ukhovskii** et **V.I. Ludovich** [48], **V.I. Ludovich** [25], [26], [27], **H. Görtler**, **K. Kirchgässner** et **P. Sorger** [18], **P.H. Rabinowitz** [41], **P.C. Fife** et **D.D. Joseph** [17], **W. Velte** [50];

2°) pour la théorie instationnaire, c'est-à-dire l'étude de l'évolution avec le temps d'une perturbation initiale, on peut distinguer deux classes de méthodes : (i) la méthode de l'énergie, essentiellement développée par **D.D. Joseph** [29] et [30] et (ii) les différentes méthodes utilisant des développements formels employés en particulier par **L.A. Segel** et **J.T. Stuart** [44], **L.A. Segel** [42], **R. Krishnamurti** [37], **S. Kogelman** et **R.C. Di Prima** [33].

Les facteurs physiques qui influent sur la structure périodique stationnaire alimentent un grand nombre de publications à l'heure actuelle : en particulier, sans faire intervenir de facteur étranger aux équations de Boussinesq (ν restant indépendant de T par exemple), il y a un effet essentiel dans la forme géométrique du récipient (physiquement borné) contenant le fluide, comme l'a montré **L.A. Segel** [43] de manière asymptotique. En fait, on a le choix entre une structure hexagonale ou une structure en rouleaux (l'écoulement est alors indépendant d'une variable d'espace transversale). Dans l'étude qui suit nous choisissons, quant à nous, la périodicité hexagonale (l'autre cas se traiterait analogiquement, de manière encore plus simple).

IX.2. POSITION DU PROBLÈME

Notons d la distance entre les plaques, ν la viscosité cinématique, g le module de l'accélération de la pesanteur, T_1 et T_2 les températures respectives des plaques inférieures et supérieures. Pour l'étude du phénomène en question, on admet que la masse volumique ρ du fluide, vérifie la loi $\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$, c'est-à-dire que ses variations avec la pression sont négligées. Avec ces notations, on rend les quantités adimensionnelles en prenant comme quantités de référence : d pour les longueurs, ν/d pour les vitesses, d^2/ν pour le temps, $\rho_0 \nu^2 / d^2$ pour la pression, puis on définit $U = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)})$ où $(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ représente le vecteur vitesse de l'écoulement et où $u^{(4)}$ se déduit de la température par la formule (voir fig. 9) :

$$T = T_2 + (1 - x_3 + Pr^{1/2} Gr^{-1/2} u^{(4)})(T_1 - T_2), \quad u^{(4)} = 0 \quad \text{pour } x_3 = 0 \text{ et } x_3 = 1,$$

Pr désigne le nombre de Prandtl et Gr le nombre de Grashof, c'est-à-dire : $Gr = \alpha g (T_1 - T_2) d^3 \nu^{-2}$. Enfin, moyennant certaines hypothèses généralement admises* sur les grandeurs respectives des paramètres, on obtient les équations vérifiées par U , où $U = 0$ représente l'écoulement de base c'est-à-dire $u^{(1)} \equiv u^{(2)} \equiv u^{(3)} \equiv 0$, et $T = (1 - x_3)T_1 + x_3 T_2$, p dépendant quadratiquement de x_3 . Il vient :

* J.P. Guiraud - Cours sur la Stabilité Hydrodynamique (1967-1968).

$$(2,1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} + u^{(j)} \partial_j u^{(i)} + \partial_i p = \partial_j \partial_j u^{(i)} + (Ra)^{1/2} \delta_i^3 u^{(4)}, & i=1,2,3, \\ \frac{\partial u^{(4)}}{\partial t} + u^{(j)} \partial_j u^{(4)} = Pr^{-1} [\partial_j \partial_j u^{(4)} + (Ra)^{1/2} u^{(3)}], \\ \partial_j u^{(j)} = 0, \end{cases}$$

les sommations étant effectuées avec la convention des indices répétés, pour j variant de 1 à 3. On a noté $Ra = Pr \cdot Gr$ (nombre de Rayleigh). Nous choisissons pour ce problème $(Ra)^{1/2}$ comme paramètre λ , il en résulte que, seules les valeurs $\lambda \geq 0$ représentent une réalité physique. Avec les notations des chapitres précédents on a :

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pr \end{pmatrix},$$

il en résulte les définitions (d'après le § IV,1.1) :

$$R_0 B_0 U = (0, 0, \lambda u^{(4)}, \lambda u^{(3)})$$

$$(A_\lambda U, W)_W = (\lambda u^{(4)}, w^{(3)})_{L_2} + (\lambda u^{(3)}, w^{(4)})_{L_2}.$$

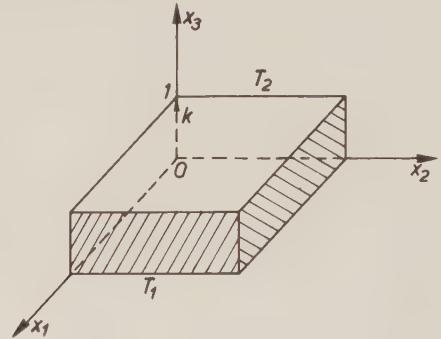


Fig. 9 - Problème de Bénard.

On en déduit que $A_\lambda = \lambda A_1$, $A_0 \equiv 0$ et que $\forall U \in \tilde{J}(\Omega)$ et $\forall W \in \mathcal{W}$ on a :

$$(2,2) \quad (A_1 U, W)_W = (u^{(4)}, w^{(3)})_{L_2} + (u^{(3)}, w^{(4)})_{L_2}.$$

On vérifie que $(1 - A_0)^{-1}$ est borné puisque c'est 1 . De plus, on peut définir A_1 de manière équivalente par le système :

$$(2,3) \quad \begin{cases} \Delta v^{(i)} - \partial_i p = -\delta_i^3 u^{(4)}, & i=1,2,3, \\ \Delta v^{(4)} = -u^{(3)}, \\ \partial_j v^{(j)} = 0, \\ v^{(i)} = 0 & \text{en } x_3 = 0 \text{ et } 1, & i=1,2,3,4, \\ v^{(i)} \text{ et } p & \text{de périodicité } (\Omega), \end{cases}$$

et $V = A_1 U$ est la solution de (2,3).

Nous définirons plus loin la périodicité (Ω) , car pour le moment il n'est pas nécessaire de la préciser.

IX.3. ÉCHANGE DES STABILITÉS

IX.3.1. Propriétés de T_λ

D'après la définition (2,2), il est immédiat que l'opérateur A_1 est autoadjoint dans $\mathcal{W}$. Comme, de plus, il est compact dans $\mathcal{W}$, il en résulte que $\sigma(T_\lambda)$ est réel, les valeurs propres étant d'indice 1 et de multiplicité finie.

Montrons que $\sigma(T_\lambda)$ est symétrique par rapport à 0. Notons $U' = (u^{(4)}, u^{(2)}, u^{(3)}, -u^{(4)})$, alors nous

pouvons écrire :

$$A_1 U = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)})$$

$$A_1 U' = (-v^{(1)}, -v^{(2)}, -v^{(3)}, v^{(4)}) = -(A_1 U)'.$$

Soient alors U et $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$ tels que $T_\lambda U = 0$, il vient :

$$U = \lambda A_1 U \text{ et } U' = \lambda (A_1 U)' = -\lambda A_1 U'.$$

D'où $-\lambda \in \sigma(T_\lambda)$ et $\sigma(T_\lambda)$ est donc symétrique par rapport à 0. Nous sommes alors certain qu'il existe une plus petite valeur propre $\lambda_0 > 0$ de T_λ et que si $\lambda \in [0, \lambda_0[$ alors T_λ est inversible. λ_0 est d'indice un et sa multiplicité sera étudiée plus loin car elle dépend de la structure périodique adoptée pour le problème.

IX.3.2. Echange des stabilités

Etudions le spectre de l'opérateur HT_λ . Pour cela nous nous inspirerons de la méthode de diagonalisation simultanée employée en dimension finie pour deux matrices symétriques dont l'une est associée à une forme quadratique définie positive.

Munissons $\hat{J}(\Omega)$ du nouveau produit scalaire :

$$(3,1) \quad [U, V]_{\hat{J}} = (R_0 U, V)_{\hat{J}},$$

celui-ci définit une norme équivalente à la précédente. On a alors $\forall U \in \hat{J}(\Omega)$ et $\forall V \in \mathcal{W}$:

$$(3,2) \quad (\mathcal{E} U, V)_{\mathcal{W}} = -[U, V]_{\hat{J}},$$

ou encore $\forall U \in \mathcal{D}_0(H) = H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$ et $\forall V \in \mathcal{W}$,

$$(3,3) \quad (U, V)_{\mathcal{W}} = -[H U, V]_{\hat{J}}.$$

L'opérateur $\mathcal{E}$ est encore autoadjoint dans $\hat{J}(\Omega)$ muni du produit scalaire (3,1) :

$$[\mathcal{E} U, V]_{\hat{J}} = -(\overline{\mathcal{E} V}, \mathcal{E} U)_{\mathcal{W}} = [U, \mathcal{E} V]_{\hat{J}}.$$

Il en résulte, puisque H est l'inverse de $\mathcal{E}$ que H est lui aussi autoadjoint dans $\hat{J}(\Omega)$ ([8] p. 309). Remarquons que l'opérateur $H \alpha_\lambda$ est borné dans $\hat{J}(\Omega)$, puisque d'après (2,3) α_λ est borné de $\hat{J}(\Omega)$ dans $H_2(\Omega) \cap \mathcal{W}$; en effet :

$$\forall U \in \hat{J}(\Omega) \quad H \alpha_\lambda U = -\lambda \Pi_0(0, 0, u^{(4)}, Pr^{-1} u^{(3)}).$$

Cherchons l'adjoint de $H \alpha_\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$\forall V \in \mathcal{W}, \quad [H \alpha_\lambda U, V]_{\hat{J}} = -(\alpha_\lambda U, V)_{\mathcal{W}} = -(\overline{\alpha_\lambda V}, U)_{\mathcal{W}} = [U, H \alpha_\lambda V]_{\hat{J}}$$

car α_λ est autoadjoint dans $\mathcal{W}$ si λ est réel. Or $\mathcal{W}$ est dense dans $\hat{J}(\Omega)$, il en résulte que $(H \alpha_\lambda)^* = H \alpha_\lambda$ dans $\hat{J}$ muni du produit scalaire (3,1). D'après [8] page 297 il vient :

$$(HT_\lambda)^* = (H - H \alpha_\lambda)^* = H^* - (H \alpha_\lambda)^* = H - H \alpha_\lambda = HT_\lambda,$$

et donc que l'opérateur non borné HT_λ est autoadjoint dans $\hat{J}(\Omega)$ muni de (3,1). D'autre part nous savons que son spectre $\sigma(HT_\lambda)$ est discret et formé uniquement de valeurs propres dépendant continuellement de λ réel, et que pour $\lambda = 0$, $HT_0 = H$ est défini négatif [d'après (3,3)]. D'où $\sigma(HT_0) \subset \mathbb{R}^-$ et si on fait croître λ à partir de 0, vue la dépendance continue des valeurs propres par rapport à λ , si

$\lambda \in \sigma(HT_\lambda)$ devient positif, c'est qu'il est passé par zéro, c'est-à-dire qu'il existe λ tel que pour un certain $U \neq 0$ on a $HT_\lambda U = 0$, d'où $T_\lambda U = 0$ et $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$. Réciproquement, si $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$ alors $0 \in \sigma(HT_\lambda)$. Il en résulte que la première valeur positive de λ , pour laquelle $0 \in \sigma(HT_\lambda)$, est $\lambda_0 = \inf \{\sigma(T_\lambda) \cap \mathbb{R}^+\} < \infty$. Comme il n'y a pas d'autre valeur propre de HT_λ qui soit de partie

réelle nulle, que 0 , on est bien dans le cas de « l'échange des stabilités » pour $\lambda = \lambda_0$. Dès que l'on a montré que $\xi(\lambda)$ traverse 0 quand λ traverse λ_0 . Pour montrer cela, anticipons sur la suite en supposant démontrée que la multiplicité de λ_0 vaut 1. Alors on applique la même méthode qu'au § VIII,4.2 et l'on trouve aisément :

$$(3,4) \quad \xi(\lambda) = \lambda_0^{-1} (\lambda - \lambda_0) \frac{(U^{(0)}, U^{(0)})_{\mathcal{H}}}{[U^{(0)}, U^{(0)}]_{\mathcal{H}}} + O[(\lambda - \lambda_0)^2],$$

quantité qui, pour $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$, a le même signe que $\lambda - \lambda_0$. On en déduit :

Lemme 9

Pour le problème de Bénard, représenté par le système classique (2,1), l'opérateur $\mathbf{HT}_\lambda$ admet un spectre réel, formé de valeurs propres d'indices valant 1 et de multiplicités finies. De plus, pour

$\lambda \in [0, \lambda_0[$ ($\lambda_0 = \inf \{\sigma(\mathbf{T}_\lambda) \cap \mathbb{R}^+\} < \infty$), $\mathbf{HT}_\lambda$ n'admet que des valeurs propres négatives et quand λ passe par λ_0 , il y a « échange des stabilités ».

Remarque : on sait donc déjà que l'hypothèse (VII,1,2) est vérifiée.

IX,4. MULTIPLICITÉ DE λ_0

Par définition, si $\lambda \in \sigma(\mathbf{T}_\lambda)$ on peut trouver $U \neq 0$ tel que $U = \lambda \mathbf{A}_1 U$, c'est-à-dire, sous forme plus classique :

$$(4,1) \quad \begin{cases} \Delta u^{(1)} - \partial_i p + \lambda \delta_i^3 u^{(4)} = 0, & i = 1, 2, 3, \\ \Delta u^{(4)} + \lambda u^{(3)} = 0, \\ \partial_1 u^{(1)} + \partial_2 u^{(2)} + \partial_3 u^{(3)} = 0, \\ u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(3)} = u^{(4)} = 0 & \text{en } x_3 = 0 \text{ et } 1, \\ U & \text{de périodicité } (\Omega). \end{cases}$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} \Delta V = \nabla p - \lambda u^{(4)} k, \\ \Delta u^{(4)} = -\lambda k \cdot V, \\ \nabla \cdot V = 0, \\ + \text{conditions aux limites,} \end{cases}$$

ou enfin :

$$(4,2) \quad \begin{cases} \Delta^3 u^{(4)} = \lambda^2 \Delta_{x_1, x_2} u^{(4)}, & (\Delta_{x_1, x_2} = \partial_1^2 + \partial_2^2), \\ u^{(4)} = \Delta u^{(4)} = \partial_3 (\Delta u^{(4)}) = 0 & \text{en } x_3 = 0 \text{ et } 1, \\ u^{(4)} & \text{de périodicité } (\Omega). \end{cases}$$

On remarque dans (4,2) que si λ est valeur propre, $-\lambda$ l'est aussi, ce qui constitue une vérification de ce que nous avons déjà vu. Remarquons enfin que $u^{(4)}$ étant déterminé, on détermine de manière unique

$V = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ d'après (4,1). Il en résulte que la dimension du sous-espace propre associé à une certaine valeur propre λ de (4,2), est égale à la dimension du sous-espace propre pour le problème $U = \lambda \mathbf{A}_1 U$, c'est-à-dire à la multiplicité de la valeur propre λ , puisque son indice vaut 1.

IX, 4.1. Périodicité hexagonale

Précisons tout d'abord quelques notations : α est la longueur du côté de l'hexagone fondamental (dont nous préciserons le choix plus loin), $\alpha = 2\pi/3\alpha$, $\beta = \alpha\sqrt{3}$, T_ω représente la rotation d'angle ω autour de l'axe Ox_3 , et on note

$$\alpha n x_1 + \beta m x_2 = (\alpha n, \beta m) \cdot (x_1, x_2)$$

et
$$T_{2\pi/3}(x_1, x_2, x_3) = (-1/2 x_1 - \sqrt{3}/2 x_2, \sqrt{3}/2 x_1 - 1/2 x_2, x_3) .$$

Une quantité scalaire $u(x_1, x_2, x_3)$ possédant la périodicité hexagonale doit être développable en série de Fourier sous la forme :

$$(4,3) \quad u(x_1, x_2, x_3) = 1/3 \sum_{n, m \geq 0} u_{nm}(x_3) \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\alpha n, \beta m) \cdot (x_1, x_2)} + e^{i(\alpha n, \beta m) \cdot T_{2\pi/3}(x_1, x_2)} + e^{i(\alpha n, \beta m) \cdot T_{4\pi/3}(x_1, x_2)} \right\} ,$$

de même une quantité vectorielle $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ qui a la périodicité spatiale peut se développer sous la forme :

$$(4,4) \quad \vec{u}(x_1, x_2, x_3) = 1/3 \sum_{n, m \geq 0} \left\{ \vec{u}_{nm}(x_3) \operatorname{Re} [e^{i(\alpha n, \beta m) \cdot (x_1, x_2)}] + T_{4\pi/3} \cdot \vec{u}_{nm}(x_3) \operatorname{Re} [e^{i(\alpha n, \beta m) \cdot T_{2\pi/3}(x_1, x_2)}] + T_{2\pi/3} \cdot \vec{u}_{nm}(x_3) \operatorname{Re} [e^{i(\alpha n, \beta m) \cdot T_{4\pi/3}(x_1, x_2)}] \right\} .$$

Pour que les définitions (4,3) et (4,4) soient consistantes, on doit avoir $\forall (x_1, x_2)$, $(\alpha n, \beta m) \cdot T_{2\pi/3}(x_1, x_2) = (\alpha n', \beta m') \cdot (x_1, x_2)$ avec n' et m' entiers. D'où $n' = 1/2(3m - n)$ et $m' = -1/2(m + n)$, et il en résulte que les sommations (4,3) et (4,4) se font sur des indices n et m de même parité. Par construction $u(x_1, x_2, x_3)$ est invariant par rotation de $\pi/3$ et $\vec{u}[T_{\pi/3}(x_1, x_2, x_3)]$ se déduit de $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ par une rotation $T_{\pi/3}$.

On peut alors vérifier, avec ces définitions, que les équations du problème (2,3) sont compatibles avec la périodicité hexagonale de $\vec{V} = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$, de $u^{(4)}$ et p .

En fait, on vérifie que : $(\omega = \frac{\pi}{3})$

$$\begin{aligned} [T_\omega(V \cdot \nabla V)]_{(x_1, x_2, x_3)} &= [V \cdot \nabla V]_{T_\omega(x_1, x_2, x_3)} , \\ [T_\omega \cdot \nabla p]_{(x_1, x_2, x_3)} &= [\nabla p]_{T_\omega(x_1, x_2, x_3)} , \\ [T_\omega \cdot \Delta V]_{(x_1, x_2, x_3)} &= [\Delta V]_{T_\omega(x_1, x_2, x_3)} , \\ [k \cdot V]_{(x_1, x_2, x_3)} &= [k \cdot V]_{T_\omega(x_1, x_2, x_3)} , \\ [V \cdot \nabla u^{(4)}]_{(x_1, x_2, x_3)} &= [(T_\omega V) \cdot (T_\omega \cdot \nabla u^{(4)})]_{(x_1, x_2, x_3)} = [V \cdot \nabla u^{(4)}]_{T_\omega(x_1, x_2, x_3)} . \end{aligned}$$

Il faut encore restreindre la classe des solutions cherchées, car nous remarquons que chaque fois que nous aurons une solution, nous aurons aussi celle qui lui est symétrique par rapport au plan (Ox_2, Ox_3) [ou (Ox_1, Ox_3)]. C'est pourquoi nous sommes amené à considérer seulement des quantités symétriques par rapport à ce plan, et l'on peut vérifier de même que précédemment que les équations sont compatibles avec cette symétrie.

En résumé, notre périodicité hexagonale est telle que les quantités sont invariantes par des translations $(k_1 3\alpha, k_2 \alpha\sqrt{3}, 0)$ où $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, qu'elles vérifient des propriétés d'invariance relativement aux rotations d'axe Ox_3 d'angle $\pi/3$ et qu'elles sont symétriques par rapport au plan (Ox_2, Ox_3) [donc aussi par rapport au plan (Ox_1, Ox_3)].

IX, 4.2. Valeurs propres de T_λ

Développons $u^{(4)}(x_1, x_2, x_3)$ sous la forme (4,3). L'équation (4,2) devient :

$$(4,5) \quad \begin{cases} (D^2 - \sigma_{nm}^2)^3 \tau_{nm}(x_3) + \lambda^2 \sigma_{nm}^2 \tau_{nm}(x_3) = 0 , \\ \tau_{nm} = (D^2 - \sigma_{nm}^2) \tau_{nm} = D(D^2 - \sigma_{nm}^2) \tau_{nm} = 0 \text{ en } x_3 = 0 \text{ et } 1 , \end{cases}$$

où l'on note $D = d/dx_3$, $\sigma_{nm}^2 = \alpha^2(n^2 + 3m^2)$, $\tau_{nm}(x_3) \equiv \mathcal{U}_{nm}^{(4)}(x_3)$.

Pour le cas $n = m = 0$, on voit directement sur (4,1) que l'on doit avoir $\mathcal{U}_{00}^{(3)} = 0$, puis $\mathcal{U}_{00}^{(4)} = 0$. Pour tout $\sigma_{nm} \neq 0$ on a une famille de valeurs propres associées dont nous allons voir que l'on peut les noter $\lambda_{i\sigma_{nm}}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, et c'est là que se posent un certain nombre de problèmes. Il faut d'abord étudier la multiplicité de $\lambda_{i\sigma_{nm}}$ pour σ_{nm} fixé, puis il faut voir si l'on peut éviter d'avoir pour un certain couple, $i \neq j$, $\sigma_{nm} \neq \sigma_{n'm'}$, l'égalité $\lambda_{i\sigma_{nm}} = \lambda_{j\sigma_{n'm'}}$, de manière à ce que pour tous les σ_{nm} possibles il n'y ait jamais de valeurs propres en concordance. Enfin, une fois la condition précédente réalisée il faut voir si, λ_0 étant déterminée, le nombre σ_{nm} lui correspondant est tel que les couples $(n', \sqrt{3}m')$ vérifiant $\sigma_{n'm'} = \sigma_{nm}$ ($n'^2 + 3m'^2 = n^2 + 3m^2$) se déduisent bien tous d'un seul couple $(n, \sqrt{3}m)$ par des rotations de $\pi/3$ et des symétries par rapport aux axes (sinon, c'est-à-dire s'il y a d'autres solutions, la multiplicité sera supérieure à 1).

Commençons par élucider ce dernier point qui a souvent été négligé par les différents auteurs : il s'agit donc d'étudier le nombre de solutions (n', m') au problème $n^2 + 3m^2 = n'^2 + 3m'^2$ où n et m sont donnés.

IX.4.3. Un peu d'Arithmétique

Étudions l'équation $n^2 + 3m^2 = n'^2 + 3m'^2$, n et m donnés. On peut trouver deux nombres réels p et q tels que

$$(p + i\sqrt{3}q)(n + i\sqrt{3}m) = n' + i\sqrt{3}m',$$

(4,6) avec $p^2 + 3q^2 = 1$. D'où :

$$p = \frac{nn' + 3mm'}{n^2 + 3m^2}, \quad q = \frac{nm' - mn'}{n^2 + 3m^2},$$

il en résulte que p et q sont rationnels et qu'ils vérifient (4,6). Ceci est un problème assez classique et il y a plusieurs manières de le résoudre. Si l'on n'attache pas d'importance à l'ordonnement des solutions, on peut obtenir la solution générale en paramétrant l'ellipse $x^2 + 3y^2 = 1$ en la coupant par une droite de pente rationnelle passant par le point (1,0) :

$$p = \frac{3t^2 - 1}{3t^2 + 1}, \quad q = \frac{-2t}{3t^2 + 1}, \quad t \in \mathbb{Q}.$$

Deux couples (p_1, q_1) et (p_2, q_2) se correspondront par symétrie par rapport à Oy si $t_1 t_2 = 1/3$. Comme application, faisons $t = -1$, on obtient : $(p, q) = (1/2, 1/2)$ c'est-à-dire que $p + i\sqrt{3}q = \exp(i\pi/3)$, c'est une solution que l'on connaissait déjà a priori. Maintenant, si l'on fait $t = -2/3$, on obtient $(p, q) = (1/7, 4/7)$ qui est une nouvelle solution et qui a pour conséquence que pour $n^2 + 3m^2 = 196$, il y a 18 solutions ! : $(n, m) = (2, 8), (11, 5), (13, 3), (14, 0), (7, 7)$ et celles déduites par symétries par rapport aux axes. En fait, il ne faut pas distinguer les solutions qui se déduisent par rotation de $\pi/3$ par symétrie par rapport aux axes, mais dans le cas $n^2 + 3m^2 = 196$ cela donne quand même deux classes distinctes correspondant à deux développements de Fourier différents. On montre facilement que l'on peut trouver autant de solutions qu'on veut pour des n, m suffisamment bien choisis, mais, la première valeur de $n^2 + 3m^2$ qui donne plus de douze solutions (celles-ci ne correspondant qu'à une seule forme pour les séries de Fourier) est 196, et même, pour $n^2 + 3m^2 < 28$, il n'y a que six solutions, ce qui permet de se passer de la condition de symétrie par rapport à $(0x_2, 0x_3)$.

Maintenant, si l'on veut ordonner les solutions, il faut choisir un critère. Si l'on prend par exemple la croissance du numérateur de la fraction irréductible p comme critère, on peut donner toutes les solutions où p a un certain numérateur fixé : par exemple si ce numérateur vaut 1 : on note les solutions positives $p_n = (R_n)^{-1}$, $q_n = Q_n \cdot R_n^{-1}$ (on montre qu'elles ont le même dénominateur), alors il suffit d'identifier :

$$R_n + \sqrt{3}Q_n = (2 + \sqrt{3})^n;$$

si le numérateur de p vaut 11, on a $p_n = 11 R_n^{-1}$, $q_n = Q_n \cdot R_n^{-1}$, et il suffit d'identifier

$$\text{soit} \quad R_n + \sqrt{3}Q_n = (14 + 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n,$$

$$\text{soit} \quad R_n + \sqrt{3}Q_n = (13 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n,$$

et ainsi de suite. Il est bien évident que les numérateurs de la fraction p ne sont pas quelconques : si on

considère un facteur premier de ce numérateur alors 3 est un carré modulo ce facteur premier ($3 = 5^2 - 2 \times 11$). Les démonstrations relatives aux expressions de R_n et Q_n n'ont pas lieu d'être décrites ici, car cela nous éloignerait par trop de l'objet de notre travail.

IX,4.4. Dépendance* des valeurs propres par rapport à σ_{nm}

IX,4.4.1. Revenons à l'équation (4,5) et posons $\sigma_{nm} = \sigma$ et $\tau_{nm} = \tau$; on peut la décomposer de la manière suivante :

$$(4,7) \quad \begin{cases} -(D^2 - \sigma^2)\tau = \nu, & \tau = 0 \text{ en } x_3 = 0 \text{ et } 1, \\ (D^2 - \sigma^2)^2 \nu = \lambda^2 \sigma^2 \tau, & \nu = D\nu = 0 \text{ en } x_3 = 0 \text{ et } 1, \end{cases}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(4,8) \quad \begin{cases} \tau_\sigma(x_3) = \int_0^1 G_1(x_3, s, \sigma) \nu_\sigma(s) ds, \\ \nu_\sigma(x_3) = \lambda^2 \sigma^2 \int_0^1 G_2(x_3, s, \sigma) \tau_\sigma(s) ds, \end{cases}$$

ou enfin :

$$(4,9) \quad \begin{cases} \tau_\sigma(x_3) = \lambda^2 \sigma^2 \int_0^1 K(x_3, s, \sigma) \tau_\sigma(s) ds, \\ \text{avec } K(x_3, s, \sigma) = \int_0^1 G_1(x_3, \eta, \sigma) G_2(\eta, s, \sigma) d\eta. \end{cases}$$

G_1 et G_2 sont les fonctions de Green associées aux deux équations différentielles (4,7). Si l'on note (4,8) : $\tau = G_1(\sigma) \nu$, $\nu = \Lambda^2 G_2(\sigma) \tau$, où $\Lambda = \lambda \sigma$, alors on sait de manière classique que les opérateurs $G_1(\sigma)$ et $G_2(\sigma)$ sont compacts dans $L_2(0,1)$. Montrons qu'ils sont fonctions analytiques de σ au voisinage de σ réel.

Pour cela, considérons les opérateurs G_{10} et G_{20} respectivement égaux à $G_1(0)$ et $G_2(0)$, (4,7) s'écrit alors :

$$(4,10) \quad \begin{cases} (1 + \sigma^2 G_{10}) \tau = G_{10} \nu, \\ (1 - 2\sigma^2 G_{20} D^2 + \sigma^4 G_{20}) \nu = \Lambda^2 G_{20} \tau. \end{cases}$$

Par intégrations par parties, on peut considérer $G_{20} D^2$ comme un opérateur compact dans $L_2(0,1)$ à noyau continu. Or, les opérateurs G_{10} et G_{20} sont autoadjoints et positifs dans $L_2(0,1)$. Il en résulte que $1 + \sigma^2 G_{10}$ est toujours inversible pour σ réel dans $L_2(0,1)$ puisque G_{10} est compact et, d'après [45], $[1 + \sigma^2 G_{10}]^{-1}$ est fonction analytique de σ dans une bande du plan complexe contenant l'axe réel. D'où, puisque

$$G_1(\sigma) = [1 + \sigma^2 G_{10}]^{-1} G_{10},$$

la fonction $\sigma \rightarrow G_1(\sigma)$ est analytique dans cette bande, à valeurs dans l'espace des opérateurs compacts de $L_2(0,1)$. Pour montrer la même chose sur l'opérateur $G_2(\sigma)$, il suffit de montrer que le noyau de l'opérateur $[1 - 2\sigma^2 G_{20} D^2 + \sigma^4 G_{20}]$ est réduit à 0. En fait, cela revient à montrer que si l'on a

$$(D^2 - \sigma^2)^2 \nu = 0, \quad \nu = D\nu = 0 \text{ en } x_3 = 0 \text{ et } 1,$$

alors $\nu = 0$. En effet on a l'identité :

$$0 = \int_0^1 [(D^2 - \sigma^2)^2 \nu] \bar{\nu} dx_3 = \|D^2 \nu\|_{L_2}^2 + 2\sigma^2 \|D\nu\|_{L_2}^2 + \sigma^4 \|\nu\|_{L_2}^2,$$

qui entraîne, pour σ réel, que la seule solution est $\nu = 0$. D'où, par le même raisonnement que précédemment, la fonction $\sigma \rightarrow [1 - 2\sigma^2 G_{20} D^2 + \sigma^4 G_{20}]^{-1}$ est analytique dans une bande du plan complexe contenant l'axe réel, et il en est de même pour la fonction $\sigma \rightarrow G_2(\sigma) = [1 - 2\sigma^2 G_{20} D^2 + \sigma^4 G_{20}]^{-1} G_{20}$, à valeurs dans l'espace des opérateurs compacts de $L_2(0,1)$.

IX,4.4.2. Maintenant, si l'on se fixe σ réel, alors on peut montrer que les valeurs propres de l'opérateur $K(\sigma) = G_1(\sigma) \cdot G_2(\sigma)$ sont toutes positives et de multiplicité 1, de la manière suivante : le noyau de $K(\sigma)$,

* L'auteur, pour ce paragraphe, s'est inspiré de V.I. Iudovich [24].

noté $K(x_3, \delta, \sigma)$, est le noyau composé de $G_1(x_3, \delta, \sigma)$ et de $G_2(x_3, \delta, \sigma)$, or ces deux noyaux sont oscillants et symétriques, c'est-à-dire que l'on a pour $k=1, 2$: $G_k(x, \delta, \sigma) = G_k(\delta, x, \sigma)$,

$$G_k(x, \delta, \sigma) > 0 \text{ pour } (x, \delta) \in [0, 1]^2$$

$$\det (\|G_k(x_i, \delta_j, \sigma)\|_{i,j=1}^m) \geq 0 \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1 \text{ pour } n=1, 2, \dots$$

$$\det (\|G_k(x_i, x_j, \sigma)\|_{i,j=1}^m) > 0 \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1 \text{ pour } n=1, 2, \dots$$

Pour montrer ces derniers points, c'est assez facile pour G_1 , car il est associé à une équation du type Sturm-Liouville et le cas général est traité dans [3] page 312. Pour G_2 , il faut remarquer que l'équation différentielle associée se transforme par l'identité :

$$(D^2 - \sigma^2)^2 v \equiv e^{\sigma x_3} D^2 [e^{-2\sigma x_3} D^2 (e^{\sigma x_3} v)] ,$$

ce qui permet, en appliquant les résultats de **M.G. Krein** ([34] voir théorème 5), d'affirmer que G_2 est oscillant-symétrique. Notons que **P.H. Rabinowitz** [41] l'a montré d'une autre manière.

Donc, $K(x_3, \delta, \sigma)$ est le composé de deux noyaux oscillants, il est donc lui-même oscillant (mais pas symétrique) d'après [3] page 245. Il en résulte que toutes ses valeurs propres sont positives, de multiplicité 1 ([34] et aussi [35]). Finalement, en appliquant le théorème de Rellich ([2] p. 587), on en déduit que les valeurs propres de l'opérateur $K(\sigma)$ sont positives et fonctions analytiques de σ dans une bande du plan complexe comprenant l'axe réel. Il en résulte que chaque $\Lambda_i(\sigma)$, $i=0, 1, \dots$ (on rappelle $\Lambda = \lambda\sigma$) est fonction analytique de σ . Or, si l'on fait $\sigma=0$, $\Lambda_i(0) \neq 0$ comme on le voit immédiatement [0 n'est pas valeur caractéristique de $K(0)$]. Il vient alors, que $\lambda_i(\sigma) = \Lambda_i(\sigma)/\sigma \rightarrow +\infty$ quand $\sigma \rightarrow 0^+$; de plus $\sigma \rightarrow \lambda_i(\sigma)$ est analytique sur $]0, \infty[$. Cherchons son comportement quand $\sigma \rightarrow \infty$.

D'après (4,7) on obtient :

$$\int_0^1 [(D^2 - \sigma^2)^3 \tau] [(D^2 - \sigma^2) \tau] dx_3 + \Lambda^2 \int_0^1 \tau [(D^2 - \sigma^2) \tau] dx_3 = 0 ,$$

qui donne, après intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \|D^2 (D^2 - \sigma^2) \tau\|_{L_2}^2 + 2\sigma^2 \|D (D^2 - \sigma^2) \tau\|_{L_2}^2 + \sigma^4 \|D^2 \tau\|_{L_2}^2 + 2\sigma^6 \|D \tau\|_{L_2}^2 + \sigma^8 \|\tau\|_{L_2}^2 = \\ = \Lambda^2 [\|D \tau\|_{L_2}^2 + \sigma^2 \|\tau\|_{L_2}^2] . \end{aligned}$$

Or $\tau \neq 0$ puisque c'est la fonction propre associée à Λ , il en résulte que $\Lambda > \sigma^3$ d'où $\lambda(\sigma) > \sigma^2$ et $\lambda(\sigma) \rightarrow \infty$ quand $\sigma \rightarrow \infty$.

IX,4.4.3. Intéressons nous plus particulièrement à $\lambda_0(\sigma)$, la plus petite valeur propre positive de (4,7). Nous allons donner une nouvelle expression de celle-ci, à la lumière de l'article de **W. Velte** [52]. Posons $\Lambda \tau = u$, le système (4,7) devient :

$$(4,11) \quad \begin{cases} (D^2 - \sigma^2)^2 v = \Lambda u , \\ -(D^2 - \sigma^2) u = \Lambda v , \end{cases}$$

avec $u = v = Dv = 0$ en $x_3 = 0$ et 1.

Définissons l'espace $\mathcal{L} = \{(u, v); u \in C^2[0, 1], v \in C^4[0, 1], u = v = Dv = 0 \text{ en } x_3 = 0 \text{ et } 1\}$, puis considérons les opérateurs :

$$A : (u, v) \rightarrow (-(D^2 - \sigma^2)u, (D^2 - \sigma^2)^2 v) ,$$

$$K : (u, v) \rightarrow (v, u) ,$$

et notons $\Phi = (u, v)$; alors (4,11) s'écrit

$$(4,12) \quad A \Phi = \Lambda K \Phi , \Phi \in \mathcal{L} .$$

Munissons $\mathcal{L}$ du produit scalaire : $\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_0^1 \Phi \cdot \Psi dx_3$, puis complétons cet espace avec la norme associée, $\mathcal{L}$ devient $[\mathcal{L}_2(0,1)]^2$. Remarquons alors que $\mathbf{K}$ est autoadjoint dans $[\mathcal{L}_2(0,1)]^2$ et que $\mathbf{A}$ admettant un inverse autoadjoint, l'est aussi. De plus, $\mathbf{A}$ est défini positif : $\forall \Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$

$$\text{on a } \langle \mathbf{A}\Phi, \Phi \rangle = \int_0^1 [(Du)^2 + \sigma^2 u^2 + (D^2v)^2 + 2\sigma^2 (Dv)^2 + \sigma^4 v^2] dx_3 \geq \inf(\sigma^2, \sigma^4) \langle \Phi, \Phi \rangle.$$

Il en résulte que si l'on considère le domaine de définition de $\mathbf{A}^{1/2}$ muni de la norme associée au produit scalaire suivant :

$$[\Phi, \Psi] = \langle \mathbf{A}\Phi, \Psi \rangle, \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{L} \quad [\text{dense dans } \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2})],$$

on obtient un nouvel espace de Hilbert noté H_A . Par intégrations par parties on remarque que $H_A = \bar{H}_1(0,1) \times H_2(0,1) =$ fermeture de $\mathcal{L}$ dans $H_1(0,1) \times H_2(0,1)$ (notations classiques [7]). Si l'on note alors $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}$, (4,12) devient :

$$\Phi = \mathbf{A}\mathbf{T}\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{L}.$$

Or, de manière classique $\mathbf{T}$ est autoadjoint et compact dans H_A :

$$[\mathbf{T}\Phi, \Psi] = \langle \mathbf{A}\mathbf{T}\Phi, \Psi \rangle = \langle \mathbf{K}\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, \mathbf{K}\Psi \rangle = \langle \Phi, \mathbf{A}\mathbf{T}\Psi \rangle = [\Phi, \mathbf{T}\Psi],$$

et la plus grande valeur propre positive de $\mathbf{T}$ est donnée par [8] page 230 :

$$(4,13) \quad \frac{1}{\Lambda_0} = \sup_{\Phi \in H_A} \frac{[\Phi, \mathbf{T}\Phi]}{[\Phi, \Phi]}.$$

Alors, si nous notons

$$j(u, v, \sigma) = \frac{\int_0^1 [(Du)^2 + \sigma^2 u^2 + (D^2v)^2 + 2\sigma^2 (Dv)^2 + \sigma^4 v^2] dx_3}{2 \int_0^1 uv dx_3},$$

(4,13) s'écrit encore (puisque $\mathcal{L}$ est dense dans H_A) :

$$(4,14) \quad \Lambda_0(\sigma) = \inf_{\Phi \in \mathcal{L}} j(u, v, \sigma), \quad \int_0^1 uv dx_3 > 0,$$

et si l'on note les solutions de (4,11) relatives à $\Lambda_0(\sigma)$: $u_0(x_3, \sigma)$ et $v_0(x_3, \sigma)$, alors $\Lambda_0(\sigma) = j[u_0(x_3, \sigma), v_0(x_3, \sigma), \sigma]$. La formulation (4,14) peut permettre le calcul approché de $\lambda_0(\sigma) = \Lambda_0(\sigma)/\sigma$ ou, au moins, le rendre plus aisé.

Signalons enfin une propriété de la fonction $\sigma \rightarrow \lambda_0(\sigma)$ non encore démontrée théoriquement jusqu'à ce jour, sa convexité. Cette propriété a été vérifiée par le calcul et est signalée en particulier dans [18], [24] et [41]. En fait on peut montrer aisément que $\sigma \rightarrow \Lambda_0(\sigma)$ est monotone croissante.*

IX,4.5. Multiplicités et choix de α (c'est-à-dire de $\alpha =$ côté de l'hexagone)

Nous venons de voir que pour chaque $\sigma_{nm}^2 = \alpha^2(n^2 + 3m^2)$ fixé, nous avons une infinité de valeurs propres positives du problème (4,5) :

$$\lambda_{0\sigma_{nm}} < \lambda_{1\sigma_{nm}} < \dots < \lambda_{i\sigma_{nm}} < \dots$$

chacune étant de multiplicité 1.

IX,4.5.1. Cherchons maintenant à choisir α tel que pour tout $\sigma_{nm} \neq \sigma_{n'm'}$ on ne puisse jamais avoir $\lambda_{i\sigma_{nm}} = \lambda_{j\sigma_{n'm'}}$. La démonstration ci-dessous est tirée de l'article [24] de V.I. Iudovich.

Définissons les ensembles $\Gamma_{i\alpha NN'} = \{\alpha; \alpha \in \mathbb{R}^+, \lambda_i(\alpha N) = \lambda_j(\alpha N')\}$, où nous notons $\lambda_i(\alpha N) = \lambda_{i\sigma_{nm}}$ avec $\sigma_{nm} = \alpha N = \alpha \sqrt{n^2 + 3m^2}$, et montrons d'abord que $\Gamma_{i\alpha NN'}$ est au plus dénombrable. En effet,

* W. Velte a montré cette propriété dans Z.A.M.P., vol. 21, 1, (1970), p. 141.

la fonction $\alpha \rightarrow \lambda_i(\alpha N) - \lambda_k(\alpha N')$ est une fonction analytique pour $\alpha \in]0, \infty[$, d'où, si elle n'est pas identiquement nulle, $\Gamma_{i \neq k, NN'}$ est au plus dénombrable. Supposons que l'on ait

$$\lambda_i(\alpha N) \equiv \lambda_k(\alpha N') \quad , \quad \forall \alpha > 0 \quad ,$$

alors si $i \neq k$ on peut encore supposer $i > k$ et il en résulte

$$\lambda_k(\alpha N') = \lambda_i(\alpha N) > \lambda_k(\alpha N) \quad , \quad \forall \alpha > 0 \quad ,$$

puisqu'on a ordonné les $\lambda_i(\alpha N)$ en ordre croissant avec l'indice, D'où :

$$\lambda_k(\alpha) > \lambda_k(N\alpha/N') > \dots > \lambda_k[(N/N')^z \alpha] \quad , \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad ,$$

or $(N/N')^z$ tend soit vers 0, soit vers ∞ quand $z \rightarrow \infty$, et dans les deux cas, d'après le § IX,4.4, $\lambda_k[(N/N')^z \alpha] \rightarrow \infty$ et l'inégalité est impossible. Il en résulte que pour $i \neq k$, l'ensemble $\Gamma_{i \neq k, NN'}$ est au plus dénombrable. Maintenant, si $i = k$, si l'on avait $\lambda_i(\alpha N) \equiv \lambda_i(\alpha N') \quad \forall \alpha > 0 \quad (N \neq N')$, il en résulterait, de même que précédemment, que

$$\lambda_i(\alpha) = \lambda_i[\alpha(N/N')^z] \quad , \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad ,$$

ce qui est impossible quand $z \rightarrow \infty$. D'où, $\Gamma_{i \neq k, NN'}$ est au plus dénombrable ($N \neq N'$). Notons alors $\Gamma = \bigcup_{i \neq k, N \neq N'} \Gamma_{i \neq k, NN'}$, où la réunion est prise par rapport à i, k , et $N = \sqrt{n^2 + 3m^2} \neq N' = \sqrt{n'^2 + 3m'^2}$; l'ensemble Γ est donc au plus dénombrable sur $\mathbb{R}^+$, et il suffira de choisir α en dehors de Γ pour que l'égalité $\lambda_i(N\alpha) = \lambda_k(N'\alpha)$ soit impossible si $N' \neq N$.

IX,4.5.2. Considérons la fonction analytique sur $\mathbb{R}^+$, $\sigma \rightarrow \lambda_o(\sigma)$, elle atteint son minimum dans un intervalle $[\varepsilon, M]$, $\varepsilon > 0$, $M < \infty$, puisqu'elle n'est pas bornée aux voisinages de 0 et de l'infini. Il en résulte, qu'elle atteint son minimum en un nombre fini de points. Notons σ_o le point «le plus à droite», c'est-à-dire le point où λ_o atteint son minimum et où $\sigma > \sigma_o \Rightarrow \lambda_o(\sigma) > \lambda_o(\sigma_o)$, et posons*

$\alpha_o = \sigma_o/2$ si $\sigma_o/2 \notin \Gamma$ (voir § IX,4.5.1.) sinon posons α_o suffisamment voisin à droite de $\sigma_o/2$ pour que $\alpha_o \notin \Gamma$ et que $\lambda_o(2\alpha_o) < \lambda_o(\alpha_o N)$ pour $N = \sqrt{n^2 + 3m^2} > 2$ (ce qui est toujours possible). Or, $N=2$ donne 6 solutions $(n, \sqrt{3}m)$ déduites par rotations de $\pi/3$, et l'espace propre associé à $\lambda_o(2\alpha_o)$ est alors de dimension 1, $\lambda_o(2\alpha_o)$ étant la plus petite valeur propre positive du problème $U = \lambda A_1 U$ (α_o est choisi tel que ceci soit réalisé). Remarquons enfin que toutes les valeurs propres de ce problème ne sont pas de multiplicité 1, puisque par exemple $\lambda_i(\alpha_o N)$, avec $N^2 = 196$, est de multiplicité 2 pour $i = 0, 1, 2, \dots$

Rappelant que le côté de l'hexagone fondamental est donné par $\alpha = 2\pi/3\alpha_o$, on peut énoncer :

Lemme 10

Pour le problème de Bénard, représenté par le système classique (2,1), dans le cadre de la périodicité hexagonale, on peut choisir le côté α de l'hexagone fondamental tel que $\lambda_o = \inf \{ \sigma(T_\lambda) \cap \mathbb{R}^+ \} < +\infty$ soit de multiplicité 1. Un moyen de calculer λ_o est fourni par

$$\lambda_o = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}^+} [\sigma^{-1} \inf_{\Phi \in \mathcal{E}} J(u, v, \sigma)] \quad , \quad \int_0^1 u \cdot v \, dx_3 > 0 \quad ,$$

avec les notations du § IX,4.4.3.

IX,5. VÉRIFICATIONS DES HYPOTHÈSES SUR LES TERMES NON LINÉAIRES

IX,5.1. Vérification de (VI,4,13)

Nous avons vu au § IX,4 que l'hypothèse (VII,1,1) est vérifiée, et cela complète le Lemme 9 pour ce qui concerne l'échange des stabilités. Pour appliquer le théorème 9, son corollaire et le théorème 10 à notre cas

* Notons que cette valeur a été envisagée dans [18].

particulier, il nous faut montrer que (VI,4,13), (VI,4,14) et (VII,4,11) sont vérifiées.

Notons déjà que (VII,4,11) est évident dans notre cas, puisque $T_o = 1$, $T_{\lambda_o}^{*(1)} = T_{\lambda_o}$, et que $V^{(o)(1)}$ est colinéaire à $U^{(o)}$ (de même sens). En effet (VII,4,11) est équivalent à :

$$(\mathcal{R} U^{(o)}, U^{(o)})_j > 0$$

ce qui est immédiat d'après la forme de $\mathcal{R}$.

Vérifions maintenant (VI,4,13), c'est-à-dire calculons

$$(5,1) \quad (T_o^{-1} B(U^{(o)}, U^{(o)}), V^{(o)})_{H_2 \cap W},$$

quantité qui peut encore s'écrire, comme nous l'avons remarqué plusieurs fois,

$$(5,2) \quad (T_o^{-1} B(U^{(o)}, U^{(o)}), V^{(o)(1)})_W.$$

Mais, $T_o^{-1} = 1$ et $V^{(o)(1)} = k U^{(o)}$, $k > 0$, comme nous l'avons déjà remarqué; il en résulte que la quantité (5,1) est proportionnelle à : $(B(U^{(o)}, U^{(o)}), U^{(o)})_W = -(\mathcal{M}(U^{(o)}, U^{(o)}), \mathcal{R} U^{(o)})_{L_2}$ d'après (V,1,4). Or, si l'on note $U^{(o)} = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)})$, les $u^{(i)}$ étant réels, on a :

$$(5,3) \quad (\mathcal{M}(U^{(o)}, U^{(o)}), \mathcal{R} U^{(o)})_{L_2} = \sum_{i,j=1}^3 (u^{(i)} \partial_i u^{(j)}, u^{(j)})_{L_2} + \text{Pr} \sum_{i=1}^3 (u^{(i)} \partial_i u^{(4)}, u^{(4)})_{L_2},$$

et comme, $\forall k$

$$\sum_{i=1}^3 (u^{(i)} \partial_i u^{(k)}, u^{(k)})_{L_2} = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial \Omega} \frac{1}{2} [u^{(k)}]^2 u^{(i)} \cdot n_i ds = 0$$

à cause de la périodicité et de la symétrie de $\partial \Omega$ par rapport à O , on vérifie bien la nullité de (5,3).

Il en résulte que (VI,4,13) est vérifié.

IX,5.2. Vérification de (VI,4,14)

Il s'agit d'étudier le signe * de la quantité

$$(5,4) \quad -(T_o^{-1} B^{(o)}(U^{(o)}, V_1), V^{(o)})_{H_2 \cap W}$$

où V_1 est solution du problème :

$$(VI,4,5) \quad \begin{cases} T_{\lambda_o} V = B(U^{(o)}, U^{(o)}), \\ E(\lambda_o) V = 0. \end{cases}$$

Comme au § IX,5.1 on peut écrire (5,4) sous la forme

$$-k (B^{(o)}(U^{(o)}, V_1), U^{(o)})_W, \quad k > 0,$$

et il reste donc à étudier le signe de la quantité :

$$(5,5) \quad ([\mathcal{M}(U^{(o)}, V_1) + \mathcal{M}(V_1, U^{(o)})], \mathcal{R} U^{(o)})_{L_2}.$$

Or, pour les mêmes raisons que précédemment on a déjà :

$$(\mathcal{M}(V_1, U^{(o)}), \mathcal{R} U^{(o)})_{L_2} = 0,$$

et il ne reste plus qu'à étudier le signe de

$$(5,6) \quad (\mathcal{M}(U^{(o)}, V_1), \mathcal{R} U^{(o)})_{L_2},$$

où V_1 satisfait

$$(5,7) \quad \begin{cases} V_1 = \lambda_o A_1 V_1 + B(U^{(o)}, U^{(o)}), \\ (V_1, U^{(o)})_W = 0, \end{cases}$$

* Ce signe a été étudié par V.I. Iudovich dans [26].

c'est-à-dire qu'en particulier V_1 est réel. Si on intègre par parties l'expression (5,6), on obtient :

$$(\mathcal{M}(U^{(e)}, V_1), \mathcal{R}U^{(e)})_{L_2} = -(\mathcal{M}(U^{(e)}, U^{(e)}), \mathcal{R}V_1)_{L_2} = (B(U^{(e)}, U^{(e)}), V_1)_w$$

et, d'après (5,7) tout revient à étudier le signe de

$$(5,8) \quad ((1 - \lambda_o A_1)V_1, V_1)_w = \|V_1\|_w^2 - \lambda_o (A_1 V_1, V_1)_w .$$

Or A_1 étant autoadjoint et compact dans $\mathcal{W}$, on a, de la même manière que pour obtenir (4,13) :

$$\frac{1}{\lambda_o} = \sup_{V \in \mathcal{W}} \frac{(V, A_1 V)_w}{\|V\|_w^2} ,$$

le maximum étant atteint seulement si V est égal à $U^{(e)}$. Or, comme $(V_1, U^{(e)})_w = 0$, il en résulte que l'on a

$$\frac{1}{\lambda_o} > \frac{(V_1, A_1 V_1)_w}{\|V_1\|_w^2}$$

et la quantité (5,8) est positive. Finalement on a bien montré

$$(VI,4,14) \quad - (T_o^{-1} B^{(e)}(U^{(e)}, V_1), V^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}} > 0 .$$

IX,6. CONCLUSION

Nous avons donc vérifié toutes les hypothèses des théorèmes 8, 9 et 10, il en résulte :

Théorème 12.

Pour le problème de Bénard, représenté par le système classique (2,1), dans le cadre de la périodicité hexagonale, on peut choisir le côté a de l'hexagone fondamental tel qu'il y ait échange des stabilités quand $\lambda = (R\alpha)^{1/2}$ traverse la valeur critique λ_o définie par le Lemme 10. D'autre part, pour le problème stationnaire, le théorème 8 s'applique et pour le problème instationnaire, quand $\lambda \in [0, \lambda_o[$, le théorème 4 s'applique, enfin quand $\lambda \in [\lambda_o, \lambda_o + \delta[$ les théorèmes 9 et 10 s'appliquent ($\delta > 0$ bien choisi).

En particulier, il en résulte que pour $\lambda \in [0, \lambda_o[$ il n'existe qu'une solution stationnaire, qui est stable par rapport à des petites perturbations de périodicité hexagonale. Pour $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_o)$ cette solution stationnaire devient instable et il apparaît deux autres solutions stationnaires, voisines, stables toutes les deux. Remarquons enfin que quand nous disons que pour $\lambda \in [0, \lambda_o[$ il n'existe qu'une solution stationnaire, cela veut dire qu'en fait on est sûr qu'il n'y en a pas d'autre qui lui soit voisine (voir théorème 8).

X. COMMENTAIRES ET REMARQUES

CHAPITRE II -

1. La définition de l'opérateur Π_0 dans $L_2(\Omega)$ a été clairement mise en évidence par **O.A. Ladyzhenskaya** [6] pages 28-30. La régularité de la restriction de cet opérateur à $H_m(\Omega)$ est absolument indispensable pour ne rien perdre des propriétés essentielles du terme non linéaire. Mais, nous remarquons que si l'on applique Π_0 à un élément U de $H(\Omega)$, il ne reste plus que la composante normale de $\Pi_0 U^{(p)}$ qui est nulle sur $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$), la partie $\Pi_0 U^{(n-p)}$ étant identique à $U^{(n-p)}$. On a donc perdu la « nullité tangentielle » de U et ceci est la source de bien des difficultés par la suite. En particulier c'est à cause de ce fait qu'au § III,4 nous sommes amené à rechercher des estimations du semi-groupe sur $H_1^0 \cap J$.

2. En ce qui concerne les choix des produits scalaires dans J , $\mathcal{W}$ et $H_2 \cap \mathcal{W}$, nous avons beaucoup de possibilités, mais le fait dominant est qu'il faut se débrouiller pour que l'opérateur $\mathcal{G}$ soit autoadjoint dans ces espaces.

3. Les équations classiques du problème de Couette-Taylor sont plus couramment écrites en coordonnées semi-polaires. Nous avons préféré les écrire sous la forme (II,4,3), qui est indépendante du système de coordonnées choisies et qui nous simplifie la tâche pour la comparaison ultérieure des différents systèmes.

CHAPITRE III -

1. Le résultat énoncé au Lemme 1 a été montré très récemment dans [23]. En fait, celui-ci est la clef de voûte de notre édifice bâti sur la considération de fonctions de $C^0([0, T]; H_2 \cap \mathcal{W})$ qui donnent un terme non linéaire dans $C^0([0, T]; H_1^0 \cap J)$ et rend donc nécessaire de telles estimations.

2. Pour résoudre nos problèmes linéaires nous avons préféré montrer l'existence de semi-groupes d'opérateurs fortement continus dans certains espaces de Hilbert, plutôt que de faire comme dans [6] où l'on cherche la solution sans l'expliciter dans $L^2([0, T]; J(\Omega))$, espace de fonctions moins régulières par rapport à t (voir théorèmes 1 et 2 p. 80 et 84 de [6]) que $C^0([0, T]; J(\Omega))$. En fait, notre formulation sera véritablement utile dès qu'il s'agira d'écrire le problème non-linéaire instationnaire sous une forme intégrale que la méthode de [6] ne permet pas d'atteindre.

3. Les estimations du Lemme 3 sont fondamentales quand on part de $H_1^0 \cap J$. Mais il faut remarquer que si l'on part de $\mathcal{W}$, c'est-à-dire de fonctions « un peu plus nulles » sur $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$) alors on peut remplacer $t^{-1/4}$ et $t^{-1/2}$ respectivement par 1 et $t^{-1/2}$, de manière évidente par interpolation, puisque $\mathcal{X}(t; H)$ est un semi-groupe analytique et donc, que $\|H\mathcal{X}(t; H)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W})} \leq \gamma(1+t^{-1})e^{-\kappa t}$, et que $H_2 \cap \mathcal{W} = [H_3 \cap \mathcal{W}, \mathcal{W}]_{1/2}$ avec les notations de [7], tandis que $\mathcal{D}_1(H) \subset H_3 \cap \mathcal{W}$.

4. Notons encore que **J.L. Lions** (communication personnelle) a montré des estimations plus générales que celles du Lemme 3 dans le cas des problèmes paraboliques généraux d'ordre $2m$ (scalaires).

CHAPITRE IV -

1. L'idée de la décomposition de l'opérateur $\mathcal{Q}_\lambda$ sous la forme (IV,1,9), ainsi que l'idée de mettre l'opérateur de la théorie linéaire sous la forme $\mathbf{HT}_\lambda$, opérant dans un espace de fonctions vectorielles de divergence nulle, est due à **J.P. Guiraud** [19]. En fait cette dépendance linéaire en λ permet de pousser très loin les raisonnements, alors qu'une dépendance seulement analytique ou même polynomiale de degré > 1 , ne le permettrait sans doute pas, sauf pour le problème stationnaire qui pourrait s'en accommoder en utilisant l'article de **Keldysh** [31] ainsi que celui de **S. Steinberg** [45], moyennant quelques très importantes complications.

2. La structure discrète du spectre de $\mathbf{HT}_\lambda$ et sa localisation ont été signalées par **V.I. ludovich** dans [28]. Celle-ci est toutefois légèrement moins précise que celle de la figure 7, déjà vue dans [20] (moyennant certaines hypothèses que nous avons dû montrer depuis).

3. L'égalité $S_p^{(e)}(\mathbf{HT}_\lambda) = \hat{J}(\Omega)$ a été annoncée par **S.G. Krein** dans [36]. Plus récemment, **Di Prima** et **Habetler** dans [15] ont considéré les cas particuliers des problèmes de Bénard et Taylor et de problèmes linéaires régis par l'équation de Orr-Sommerfeld, et montré que les fonctions propres généralisées engendrent tout l'espace, en utilisant un théorème dû à **Naimark**.

4. Au sujet de la formule (IV,6,12) explicitant le semi-groupe $\mathfrak{I}(t; \mathbf{HT}_\lambda)$, il est remarquable de constater que bon nombre d'auteurs préoccupés par la théorie linéaire, ont complètement ignoré le fait que leur étude n'est valable qu'à condition que le spectre de $\mathbf{HT}_\lambda$ soit discret, formé de valeurs propres, et qu'en plus les vecteurs propres doivent engendrer tout l'espace, c'est-à-dire, entre-autres, qu'ils supposent implicitement tous les indices égaux à 1.

5. Notons enfin, que notre démonstration de (IV,6,14) supplante celle faite dans [20] où l'auteur a employé une mauvaise définition de $\mathbf{E}(\tau_\lambda)$.

CHAPITRE V -

1. La formulation (V,2,1) est due à **J.P. Guiraud** [19], directement inspirée de son aspect pratique pour l'étude du problème non-linéaire stationnaire (V,2,3), avec des méthodes du type de celles qu'emploie **V.I. ludovich**, par exemple dans [26].

2. La formulation (V,3,1) semble avoir été d'abord employée par **V.I. ludovich** dans [28] (ne fournissant aucune démonstration). Elle fut reprise par **J.P. Guiraud** dans [19] sous une forme heuristique, car à cette époque le « bon espace » fonctionnel et les estimations nécessaires n'avaient pas encore été découvertes.

3. Le théorème d'existence 3 est le plus général que comporte notre travail; les autres résultats n'en sont que des prolongements, ou des améliorations de sa démonstration pour des cas plus particuliers. Signalons que **V.I. ludovich** a indiqué dans [28] des résultats analogues à ceux du théorème 4.

4. Le théorème d'existence 5' fournit une solution unique au système (V,4,6) dans $C^0([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W}) \cap C^1([0, \infty[; \hat{J})$ pourvu que $\|U_0\|_{H_2 \cap \mathcal{W}}$ et $\|\Pi_0 f(t)\|_{H_1^2 \cap \hat{J}}$ ne soient pas trop grands. En fait, **Tartar*** a montré récemment que pour une dimension ≤ 4 , si $\|U_0\|_{\mathcal{W}}$ et $\int_0^{t+1} \|\Pi_0 f(\tau)\|_{\hat{J}}^2 d\tau$ ne sont pas trop grands, alors il existe une solution unique U du système (V,4,6) dans $L_2^{(loc)}([0, \infty[; H_2 \cap \mathcal{W}) \cap C^0([0, \infty[; \mathcal{W}) \cap H_1^{(loc)}([0, \infty[; \hat{J})$. Il utilise pour cela la méthode de compacité en se basant sur le fait que $\mathbf{H}$ est auto-adjoint, défini négatif, dans $\hat{J}$. Il faut noter que cette méthode ne peut donner d'aussi bon résultat dans le cas où l'opérateur linéaire $\mathbf{HT}_\lambda$ n'est plus autoadjoint et encore moins si son spectre comporte une partie réelle positive.

5. Quant au théorème 6, il semble que ce soit un résultat analogue qu'ait voulu montrer **V.I. ludovich** dans [28].

* Communication personnelle.

6. Notons que **W. Eckhaus** s'est placé, dans son étude [11], dans le cas où l'on peut écrire le système (V,6,7), c'est-à-dire que le théorème 1 doit être vérifié et tous les indices des ζ_i doivent être égaux à 1. Notons enfin, que tout récemment **S. Kogelman** et **R.C. Di Prima** [33] ont eux aussi utilisé cette méthode, se basant naturellement sur l'article déjà cité [15].

CHAPITRE VI -

L'auteur a choisi la méthode préconisée par **Vainberg** et **Trenogin** [49] plutôt qu'une application directe du théorème de **Krasnoselskii** [5] page 196 à l'équation (VI,1,1), pour le cas m impair. En effet, celui-ci ne nous fournit aucun renseignement sur la continuité du spectre de l'opérateur non linéaire du second membre de (VI,1,1); il n'affirme que le fait que dans tout voisinage de λ_0 , $\exists \lambda_1 \neq \lambda_0$ tel que l'on puisse trouver $U_{\lambda_1} \neq 0$ solution de (VI,1,1), ou, ce qui revient au même, que sur toute sphère de rayon suffisamment petit, centrée en O , de $H_2 \cap \mathcal{W}$, $\exists U$ (donc $\neq 0$) solution de (VI,1,1) pour un certain λ voisin de λ_0 . Or, ce qui nous intéresse est essentiellement la continuité de U par rapport à λ , et cela nécessite une méthode plus analytique.

Néanmoins, nous avons quand même dû employer une variante du théorème en question dans un espace de dimension finie (impaire) pour prouver un important corollaire du théorème 7.

CHAPITRE VII -

1. Les hypothèses simplificatrices (VII,1,1) et (VII,1,2) sont vérifiées au chapitre IX dans le cas du problème de Bénard. Notons que pour le problème de Couette-Taylor axisymétrique, **R.C. Di Prima** et **G.J. Habetler** [15] ont montré tout récemment que dans le cas particulier où l'espace entre les cylindres est petit et où le rapport des vitesses angulaires des deux cylindres est voisin de 1, alors il y a «échange des stabilités», et **V.I. ludovich** [24] a montré que si l'on se restreint aux perturbations vérifiant certaines conditions de parité dans Ω relativement à α_s , alors il existe des valeurs propres réelles positives de multiplicité 1, à condition que A défini au § II,4.2 soit > 0 , $v_0(r)$ étant pris > 0 .

2. L'idée de la décomposition en deux morceaux $X+Y$ est due à **J.P. Guiraud** [19]; mais il faut bien voir que le Lemme 7 du chapitre V est absolument indispensable pour que celle-ci soit efficace. L'intégration par parties nécessaire pour «mettre en lieu sûr» la partie principale de Y a été vue dans [20] et même utilisée par **W. Eckhaus** dans [11], dans un but, somme toute, semblable.

3. Dans [20], l'auteur a supposé $\nu = 1$, $m > 1$ pour λ_0 , et $\nu_i = 1$ pour tous les $\zeta_i = O(\lambda - \lambda_0)$, et donné une condition généralisant (VI,4,14) pour que la solution reste bornée. Nous ne l'avons pas intégré dans ce travail, car cela n'aurait contribué qu'à la complication des notations et les résultats obtenus sont moins forts. Néanmoins, c'est là que l'importance de l'hypothèse (VI,4,14) pour le problème instationnaire a été mise en évidence pour la première fois, les démonstrations du théorème 9 et de son corollaire n'ayant pu être complètement élaborées que dans [22].

4. Le paragraphe VII,4.2 est inspiré du travail de **V.I. ludovich** [27] relatif au problème de Bénard. Il a montré en particulier que (VII,4,10) est vérifié, c'est-à-dire que $\sigma(\epsilon)$ est < 0 pour $|\epsilon|$ suffisamment petit.

CHAPITRE VIII -

1. Nous avons supposé α_1 et $\alpha_2 \neq 0$ car il n'est pas nécessaire de les supposer nuls. Par contre si l'on suppose que (VIII,2,8) n'est pas réalisé, alors on vérifie qu'il n'est pas possible de faire le raisonnement du § VIII,3.3.

En effet, dans (VIII,3,13) il faut changer $\bar{\alpha}_1$ en $\bar{\alpha}_1 - \alpha_0$, où $\alpha_0 = (T_{\lambda_c}^{-1} B(U^{(e)}, U^{(e)}), W^{(e)})_{H_2 \cap \mathcal{W}}$,

et, dans la première des deux estimations (VIII,3,21), il faut changer $\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi}$ en $\bar{\alpha}_1 e^{i\varphi} + \bar{\alpha}_0 e^{-i\varphi}$. Cela entraîne l'apparition, dans l'intégrale suivante, d'un terme supplémentaire dont la borne est $O[(\lambda - \lambda_c)^{-1}]$, ce que nous cherchons justement à éviter !

2. Il faut mentionner que, dès 1944, **Landau** [38] a « vu », en opérant des moyennes temporelles, l'importance négligeable des « termes oscillants ». C'est pourquoi il a admis d'emblée l'équation d'amplitude du type (VIII,3,14), après avoir négligé les termes d'ordre supérieur. Il reste néanmoins que l'hypothèse (VIII,2,8) est encore nécessaire bien qu'elle supprime un « terme oscillant » dans (VIII,3,13). Afin d'honorer sa mémoire nous nous permettons d'appeler (VIII,2,8) et (VI,4,13) « Hypothèses de Landau », en pensant qu'elles sont indispensables pour trouver une équation d'amplitude du type de celle de Landau dont la solution tend vers une limite.

Manuscrit remis le 17 novembre 1970.

* * *

RÉFÉRENCES

I. Livres de Mathématiques

- [1] AGMON S. — *Lectures on elliptic boundary value problems*. Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [2] DUNFORD N. and SCHWARTZ J.T. — *Linear Operators*. Interscience, New York, 1964.
- [3] GANTMACHER F.R. and KREIN M.G. — *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*. A.E.C. tr. 4481 (1961) - (Traduit du russe G.I.T.T.L., Moscou - Léninegrad, 1950).
- [4] HILLE E. and PHILLIPS R.S. — *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society Colloquium publications, vol. 31, 1957.
- [5] KRASNOSELSKII M.A. — *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [6] LADYZHENSKAYA O.A. — *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach, 1963.
- [7] LIONS J.L. et MAGENES E. — *Problèmes aux limites non homogènes*. Dunod, 1968 (vol. 1).
- [8] RIESZ F. et NAGY B. SZ. — *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, 1965.
- [9] ROSEAU M. — *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. Springer Verlag, Berlin, vol. 8, 1966.

II. Livres sur la stabilité hydrodynamique

- [10] CHANDRASEKHAR S. — *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford, Clarendon Press, 1961.
- [11] ECKHAUS W. — *Studies in non linear stability theory*. Springer Verlag, Berlin, vol. 6, 1965.
- [12] LIN C.C. — *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge, 1955.

III. Articles

- [13] AGMON S., DOUGLIS A. and NIRENBERG L. — *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Communication on Pure and Applied Mathematics, vol. 17, 1, (1964), p. 35-92.
- [14] DAVEY A., DI PRIMA R.C. and STUART J.T. — *On the instability of Taylor vortices*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 31, 1, (1968), p. 17-52.
- [15] DI PRIMA R.C. and HABETLER G.J. — *A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 34, 3, (1969), p. 218-227.
- [16] ELLINGSEN T., GJEVIK B. and PALM E. — *On the non-linear stability of plane Couette flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 40, 1, (1970), p. 97-112.
- [17] FIFE P.C. and JOSEPH D.D. — *Existence of convective solutions of the generalized Bénard problem which are analytic in their norm*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 33, 2, (1969), p. 116-138.
- [18] GÖRTLER H., KIRCHGÄSSNER K., SORGER P. — *Branching solutions of the Bénard problem*. Problems of hydrodynamics and continuum mechanics. NAUKA, Moscou (1969), p. 133-149.
- [19] GUIRAUD J.P. et IOOSS G. — *Sur la stabilité des écoulements laminaires*. C.R.Acad. Sc., t. 266, série A, (1968), p. 1283-1286.
- [20] IOOSS G. — *Application de la théorie des semi-groupes à l'étude de la stabilité des écoulements laminaires*. Journal de Mécanique, vol. 8, 4, (1969), p. 477-507.
- [21] IOOSS G. — *Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements visqueux incompressibles*. La Rech. Aérosp., n° 1970-1, p. 7-14.
- [22] IOOSS G. — *Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements laminaires dans le cas de l'échange des stabilités*. Archive for Rational Mechanics and Analysis (à paraître).

- [23] IOOSS G. — *Estimation au voisinage de $t=0$, pour un exemple de problème d'évolution où il y a incompatibilité entre les conditions initiales et aux limites*. C.R.Acad. Sc., t. 271, 3, série A, (1970), p. 187-190.
- [24] IUDOVICH V.I. — *Secondary flows and fluid instability between rotating cylinders*. Journ. of Applied Math. and Mech., vol. 30, 4, (1966), p. 822-833.
- [25] IUDOVICH V.I. — *On the origin of convection*. Journ. of Applied Math. and Mech., vol. 30, 6, (1966), p. 1193-1199.
- [26] IUDOVICH V.I. — *Free convection and bifurcation*. Journ. of Applied Math. and Mech., vol. 31, 1, (1967), p. 103-114.
- [27] IUDOVICH V.I. — *Stability of convection flows*. Journ. of Applied Math. and Mech., vol. 31, 2, (1967), p. 294-303.
- [28] IUDOVICH V.I. — *Sur la stabilité des écoulements stationnaires d'un fluide visqueux incompressible*. Doklady Akademii Nauk SSSR, vol. 161, 5, (1965), p. 1037-1040, (en russe).
- [29] JOSEPH D.D. — *On the stability of the Boussinesq equations*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 20, 1, (1965), p. 59-71.
- [30] JOSEPH D.D. — *Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 22, 3, (1966), p. 163-184.
- [31] KELDYSH M.V. — *Sur les valeurs propres et les fonctions propres de certaines classes d'équations non-autoadjointes*. Doklady Akademii Nauk SSSR, vol. 77, 1, (1951), p. 11-14, (en russe).
- [32] KIRCHGÄSSNER K. and SORGER P. — *Branching analysis for the Taylor problem*. The Quarterly Journal of Mech. and Applied Math., vol. 22, 2, (1969), p. 183-209.
- [33] KOGELMAN S. and DI PRIMA R.C. — *Stability of spatially periodic supercritical flows in hydrodynamics*. The Physics of Fluids, vol. 13, 1, (1970), p. 1-11.
- [34] KREIN M.G. — *Sur les fonctions de Green non-symétriques oscillatoires des opérateurs différentiels ordinaires*. C.R. Acad. Sc. de l'U.R.S.S., vol. 25, 8, (1939), p. 643-646.
- [35] KREIN M.G. and RUTMAN M.A. — *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*. Translations series 1, vol. 10, p. 199-325. American Mathematical Society, (1962).
- [36] KREIN S.G. — *Sur les propriétés fonctionnelles des opérateurs de l'analyse vectorielle et de l'hydrodynamique*. Doklady Akademii Nauk SSSR, vol. 93, 6, (1953), p. 969-972, (en russe).
- [37] KRISHNAMURTI R. — *Finite amplitude convection with changing mean temperature*. Journ. of Fluid Mechanics, vol. 33, 3, (1968), p. 445-455.
- [38] LANDAU L. — *On the problem of turbulence*. Doklady Akademii Nauk SSSR, vol. 44,8, (1944), p. 311-314.
- [39] OVCHINNIKOVA S.N. and IUDOVICH V.I. — *Analysis of secondary steady flow between rotating cylinders*. Journ. of Applied Math. and Mech., vol. 32,5, (1968), p. 884-894.
- [40] PAZY A. — *On the differentiability and compactness of semi-groups of linear operators*. Journ. of Math. and Mech., vol. 17, 12, (1968), p. 1131-1141.
- [41] RABINOWITZ P.H. — *Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 29, 1, (1968), p. 32-57.
- [42] SEGEL L.A. — *The structure of non-linear cellular solutions to the Boussinesq equations*. Journ. of Fluid Mech., vol. 21, 2, (1965), p. 345-358.
- [43] SEGEL L.A. — *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*. Journ. of Fluid Mech., vol. 38, 1, (1969), p. 203-224.
- [44] SEGEL L.A. and STUART J.T. — *On the question of the preferred mode in cellular thermal convection*. Journ. of Fluid Mech., vol. 13, 2, (1962), p. 289-306.
- [45] STEINBERG S. — *Meromorphic families of compact operators*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 31, 5, (1968), p. 372-379.
- [46] STUART J.T. — *On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability*. Journ. of Fluid Mech., vol. 4, 1, (1958), p. 1-21.
- [47] STUART J.T. — *On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows (part I)*. Journ. of Fluid Mech., vol. 9, 3, (1960), p. 353-370.
- [48] UKHOVSKII M.R. and IUDOVICH V.I. — *On the equations of steady state convection*. Journ. of Applied Math. and Mech., vol. 27, 2, (1963), p. 432-440.
- [49] VAINBERG M.M. et TRENIGIN V.A. — *Méthodes de Liapounov et Schmidt dans la théorie des équations non linéaires et leurs développements ultérieurs*. Uspeki Mat. Nauk, vol. 17, 2 (104), (1962), p. 13-75, (en russe).
- [50] VELTE W. — *Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 16, 2, (1964), p. 97-125.

- [51] VELTE W. — *Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 22, 1, (1966), p. 1-14.
- [52] VELTE W. — *Konvexität der Eigenkurven beim Bénardschen Problem*. Zeitschrift für angewandte Math. und Physik, vol. 20,5, (1969), p. 636-641.
- [53] WATSON J. — *On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows (part II)*. Journ. of Fluid Mechanics, vol. 9, 3, (1960), p. 371-389.

* * *

THÉORIE NON LINÉAIRE DE LA STABILITÉ DES ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

par G. IOOSS

SOMMAIRE

On étudie l'existence et l'évolution d'un écoulement, en milieu visqueux incompressible, résultant de la perturbation à l'instant $t=0$ d'un écoulement stationnaire de base. On peut distinguer trois étapes principales.

1. On justifie le critère de stabilité fourni par la linéarisation du système d'équations. Pour cela on montre, d'une part, que la solution du système linéarisé est une combinaison linéaire de modes propres généralisés dont les coefficients font en général intervenir un polynôme de t en plus du facteur exponentiel $\exp(\zeta_i t)$ relatif à la valeur propre ζ_i (Cf. CHAP. II, III, IV). On montre d'autre part qu'il existe pour le problème non linéaire une solution généralisée unique (dans un certain espace de Banach). Enfin, dans le cas où il y a stabilité de l'écoulement de base pour la théorie linéaire, on montre que la solution généralisée tend bien, quand $t \rightarrow \infty$, vers la solution stationnaire représentant l'écoulement de base, pourvu que la perturbation initiale soit assez petite (Cf. CHAP. V).

2. On étudie le cas où il y a «échange des stabilités», cas qui consiste à supposer qu'à la stabilité neutre, zéro est la seule valeur propre de partie réelle nulle. On suppose la multiplicité algébrique, de cette valeur propre, égale à 1 et on se place dans un cas faiblement surcritique, où la théorie linéaire prédit une croissance exponentielle du mode propre le plus instable; on montre alors, sous certaines hypothèses, qu'il existe une solution généralisée, unique, bornée quelque soit t . De plus, quand $t \rightarrow \infty$, on peut représenter asymptotiquement cette solution par une *expression stationnaire différente* de la solution représentant l'écoulement de base.

On est amené à faire une étude complète de l'existence et de la non-unicité des solutions stationnaires du problème non linéaire. On montre alors, dans le cadre des mêmes hypothèses que précédemment qu'il existe en fait deux nouvelles solutions stationnaires stables dont la représentation asymptotique correspond à celle de la solution du problème instationnaire trouvée précédemment (Cf. CHAP. VI et VII). Pour illustrer ce cas, on étudie au chapitre IX le problème de Bénard, et l'on montre que toutes les hypothèses effectuées précédemment sont vérifiées.

3. On étudie enfin le cas où il n'y a pas «échange des stabilités», en supposant qu'à la stabilité neutre, il n'y a que deux valeurs propres $(\pm i\eta_0)$ imaginaires conjuguées, de parties réelles nulles. On suppose leur multiplicité algébrique égale à 1 et on se place dans un cas faiblement surcritique comme au 2. On montre alors, sous certaines hypothèses, qu'il existe une solution généralisée, unique, bornée quelque soit t . De plus, quand $t \rightarrow \infty$, on peut la représenter asymptotiquement par une expression périodique par rapport à t , de période $2\pi/\eta_0$, et d'amplitude constante (Cf. CHAP. VIII).

* * *

NONLINEAR STABILITY THEORY OF LAMINAR FLOWS

by G. IOOSS

ABSTRACT

A study is made of the existence and evolution of the perturbation of a steady basic flow in a viscous incompressible fluid. The following three main topics can be distinguished.

1. The stability criterion yielded by the linearisation of the system of equations is justified. To this end, the solution of the linearized system is shown to consist of a linear combination of generalized eigen modes, the coefficients of which involve polynomials of t , besides the exponential factors $\exp(\zeta_k t)$ relative to the eigenvalues ζ_k (see ch. II, III, IV). It is furthermore demonstrated that there exists a unique generalized solution (in a certain Banach space) to the nonlinear problem. Lastly, in the case when the basic flow is stable according to the linear theory, the generalized solution is proved to tend, for $t \rightarrow \infty$, towards the steady solution which represents the basic flow, provided the initial disturbance is small enough (see ch. V).

2. A study is made of the case when there is 'exchange of stabilities'; this case amounts to assuming that, at neutral stability, the only eigenvalue with null real part is zero. The algebraic multiplicity of this eigenvalue is taken as one, and a weakly supercritical case is explored, for which the linear theory predicts an exponential increase of the most unstable eigen mode. It is then shown under certain hypotheses, that there exists a unique bounded generalized solution, for any t . Moreover, when $t \rightarrow \infty$, this solution can be represented asymptotically by a *steady expression, different* from the solution corresponding to the basic flow.

This leads one to make a comprehensive study of the existence and non-uniqueness of steady solutions to the nonlinear problem. According to the foregoing hypothesis it is then shown that, in fact, there exist two new stable, steady solutions, one of which possesses an asymptotic representation which corresponds to that of the solution previously found for the unsteady problem (see ch. VI and VII). By way of illustration, Bénard's problem is studied in chapter IX, and all the hypotheses so far made are shown to be verified.

3. Lastly, the case when there is not 'exchange of stabilities' is considered on the assumption that, at neutral stability, there are only two conjugate imaginary eigenvalues $(\pm i\eta_0)$, of real parts equal to zero. Their algebraic multiplicity is taken as one, and, as in 2., a weakly supercritical case is considered. Using certain hypotheses, it is proved that there exists a unique generalized solution, bounded for any t . Moreover, when $t \rightarrow \infty$, it can be represented asymptotically by means of an expression that is periodic with respect to t , of period $2\pi/\eta_0$, and of constant amplitude (see ch. VIII).

* * *

NICHTLINEAREN THEORIE DER STABILITÄT LAMINÄRER STRÖMUNGEN

von G. IOOSS

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Existenz und der zeitliche Verlauf einer in einem zähen Medium stattfindenden Strömung untersucht, die zum Zeitpunkt $t=0$ aus einer stationären Grundströmung hervorgegangen ist. Drei Hauptabschnitte sind zu unterscheiden :

1. Die nach Linearisierung des Gleichungssystems erhaltenen Stabilitätsbedingungen werden begründet. Man zeigt, dass die Lösung des linearisierten Systems eine lineare Kombination der allgemeinen Eigenvektoren ist, deren Koeffizienten im allgemeinen ausser dem exponentiellen auf den Eigenwert ζ_i bezüglichen Faktor $\exp(\zeta_i t)$ ein Polynom in t enthalten (siehe Kapitel II, III, IV). Anschliessend wird gezeigt, dass das nicht-lineare Problem eine allgemeine, eindeutige Lösung hat (in einem bestimmten Banach'schen Raum). Schliesslich wird nachgewiesen, dass wenn die Grundströmung nach der linearisierten Theorie die Stabilitätsbedingungen erfüllt, die allgemeine Lösung für $t \rightarrow \infty$ gegen die stationäre, die Grundströmung darstellende Lösung strebt, vorausgesetzt, dass die Anfangsstörung klein ist (siehe Kapitel V).

2. Man untersucht den Fall des «Stabilitätsaustausches». Dabei ist die Annahme zugrunde gelegt, dass bei neutraler Stabilität der einzige Eigenwert mit verschwindendem Realteil Null ist. Sei die algebraische Vielfachheit dieses Eigenwertes 1 und betrachten wir einen schwach überkritischen Fall für den die lineare Theorie ein exponentielles Anwachsen des labilsten Eigenvektors voraussetzt. Man kann nachweisen, dass es unter Einhaltung gewisser Hypothesen eine allgemeine, eindeutige und für alle Werte von t beschränkte Lösung gibt. Man kann für $t \rightarrow \infty$ diese Lösung asymptotisch durch einen stationären von der die Grundströmung darstellenden Lösung verschiedenen Ausdruck darstellen.

Es folgt eine vollständige Untersuchung der Existenz und der Nichteindeutigkeit der stationären Lösungen des nichtlinearen Problems. Es lässt sich im Rahmen der bisher verwendeten Hypothesen zeigen, dass es zwei neue stationäre den Stabilitätsbedingungen gehorchende Lösungen gibt, deren asymptotische Darstellung der vorher ermittelten Lösung des nichtstationären Problems entspricht (siehe Kapitel VI und VII). Zur Erläuterung dieses Falles wird im Kapitel IX das Bénard'sche Problem untersucht und sämtliche aufgestellten Hypothesen als stichhaltig erwiesen.

3. Schliesslich wird der Fall ohne «Stabilitätsaustausch» untersucht. Man nimmt an, dass bei neutraler Stabilität nur zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit verschwindendem Realteil ($\pm i\eta_0$) existieren. Sei ihre algebraische Vielfachheit 1 und betrachten wir einen leicht überkritischen Fall (wie im Abschnitt 2). Man kann zeigen, dass es bei Einhaltung gewisser Hypothesen eine allgemeine, eindeutige und für alle Werte von t beschränkte Lösung gibt. Letztere kann für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch durch einen in t periodischen Ausdruck dargestellt werden, dessen Periode $2\pi/\eta_0$ und dessen Amplitude konstant ist.

* * *

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

G. IOOSS

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ

Изучается существование и развитие течения в вязкой и несжимаемой среде, происходящего от возмущения в момент $t = 0$ стационарного основного потока. Мы можем различать три главных этапа.

1) Доказывается критерий устойчивости данной линеаризованной системой уравнений. С этой целью, с одной стороны, доказывается, что решение линеаризованной системы представляет из себя линейное соединение собственных, обобщенных форм колебания, коэффициенты которых вводят, вообще говоря, многочлен от t кроме степенного множителя $\exp(\zeta_i t)$ относящегося к собственному значению ζ_i (Снар. II, III, IV). С другой стороны, доказывается, что существует единственное, обобщенное решение нелинейной задачи (в некотором пространстве Банаха). Наконец, в случае когда имеется устойчивость основного течения для линейной теории, доказывается, что обобщенное решение стремится, когда $t \rightarrow \infty$, к стационарному решению, представляющему основное течение, если только первоначальное возмущение достаточно мало (Снар. V).

2) Изучается случай, когда имеется "изменение устойчивостей", случай, который состоит в предположении, что, при безразличной устойчивости, ноль — единственное собственное значение вещественной нулевой части. Предполагается алгебраическая кратность этого собственного значения равного единице и воображается случай слабо сверхкритический, когда линейная теория предполагает степенное возрастание собственной наиболее неустойчивой формы колебания; тогда доказывается, при помощи некоторых гипотез, что существует единственное, обобщенное, ограниченное решение, какова бы ни была величина t . Кроме того, если $t \rightarrow \infty$, это решение может быть представлено асимптотически при помощи стационарного выражения отличного от решения представляющего основной поток.

Осуществляется полное изучение существования и неединственности стационарных решений нелинейной задачи. Тогда доказывается, при помощи тех же гипотез, существование двух новых, устойчивых стационарных решений, асимптотическое представление которых соответствует только-что найденному решению нестационарной задачи (Снар. VI и VII). Чтобы сделать наглядным этот случай изучается в главе девятой задача Бенарда и доказывается, что все ранее сделанные гипотезы оправдываются.

3) Наконец, изучается случай, в котором нет "изменения устойчивостей", предполагая, что, при нейтральной устойчивости, существуют только два собственных $(\pm i\eta_0)$, мнимых, сопряженных значения с нулевыми вещественными частями. Предполагается их алгебраическая кратность равная единице и выбирается слабо сверхкритический случай, как в 2). Тогда доказывается, при помощи некоторых гипотез, существование единственного, обобщенного решения, ограниченного при любом значении t . Кроме того, когда $t \rightarrow \infty$, оно может быть представлено асимптотически при помощи периодического выражения по отношению к t , имеющего период $2\pi/\eta_0$ и постоянную амплитуду (Снар. VIII).

* * *

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LE SPECTRE D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

Vu et Approuvé

PARIS, le 13 AVRIL 1971

Le Président

de l'Université de PARIS VI

André HERPIN

